



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
Escuela de Ingenierías Industriales y Civiles

*Máster Universitario en Ingeniería Industrial*

*Curso 2017-2018*

Trabajo Fin de Máster  
*“Cálculo de impedancias de cimentaciones  
rígidas para aerogeneradores en suelos  
poroelásticos estratificados”*

Autor: D. Ayoze Daniel Falcón Padrón

Tutor 1: Prof. Dr. D. Fidel García del Pino

Tutor 2: Dr. D. Jacob David Rodríguez Bordón

Las Palmas de Gran Canaria, julio de 2018

*“Cálculo de impedancias de cimentaciones  
rígidas para aerogeneradores en suelos  
poroelásticos estratificados”*

Trabajo presentado para la obtención del grado de  
Máster Universitario en Ingeniería Industrial

Autor:

D. Ayoze Daniel Falcón Padrón

Tutor 1:

Prof. Dr. D. Fidel García del Pino

Tutor 2:

Dr. D. Jacob David Rodríguez Bordón

Las Palmas de Gran Canaria, julio de 2018

*A mis padres, José Manuel (†) y Amelia.*

*Papá fue lo más grande que tuvimos. Mamá, para mi enorme suerte, tú todavía lo eres.*

*Gracias por todo*

## *Agradecimientos*

Antes que nada quisiera tener una palabras de agradecimientos para aquellos que, de una u otra manera, han contribuido a que hoy esté a punto de presentar este Trabajo Fin de Máster (TFM).

Sin duda, las primeras palabras son para mis dos “tutores”, el Dr. Jacob Rodríguez y el Prof. Dr. Juan José Aznárez. Los dos han contribuido de manera decisiva para que este TFM haya llegado a buen puerto. Solo puedo tener buenas palabras hacia ellos.

Muchas gracias, Jacob. Sin tu ayuda no sé qué hubiera sido de mí en la utilización del software, la parte de programación y la revisión de la Memoria. Tus “comentarios” han hecho que la Memoria final haya ganado en calidad. Sin duda, tu guía ha sido fundamental para cumplir los objetivos propuestos en este trabajo. Gracias de verdad.

A ti también, Juanjo. Veo difícil que este trabajo hubiera salido adelante sin tu enorme sabiduría. Es un espectáculo ver lo que solo tú eres capaz de ver... Perdí la cuenta de las ocasiones que, en el desarrollo del TFM, me encontré con problemas que solo tú fuiste capaz de resolver. He sido muy afortunado de tenerte de maestro y, que sepas, que te estoy enormemente agradecido.

Aunque ya lo he escrito en una hoja anterior, lo repito. A mis padres, José Manuel (†) y Amelia. Estoy aquí gracias a ellos y, no sé si será bueno o malo, pero soy como soy gracias a ellos. GRACIAS A LOS DOS.

A mi familia, cómo no. Cuando papá nos dejó, las cosas se pusieron muy duras. Sin embargo, con mucho esfuerzo y vuestra ayuda, Fefita y Sarito, voy a llegar... Cuando llegué a Ingeniero Técnico Industrial, hace ya unos años, fue para mí todo un logro... algo impensable. Y miren ahora... todo un Máster en Ingeniería Industrial. Un poquito de este título es vuestro. Gracias.

No puedo dejar escapar la oportunidad de tener una buenas palabras para dos de mis profesores, Orlando Maeso y Luis Padrón. Fue un honor ser vuestro alumno. Así de simple, así de fácil... y Luis, sé que a veces los nervios me juegan malas pasadas... lo siento por todas las veces que te he “subido la tensión”. Por favor, no me lo tengas en cuenta.

Y cómo no, falta uno, el Prof. Dr. Fidel García. Gracias, Fidel. Recuerdo CAI en el segundo semestre de 2016. Fueron un espectáculo tus clases magistrales. Pero para mi desgracia, ya tenía tutor asignado oficialmente para TFG. Sin embargo, el destino quiso que nos encontráramos otra vez más adelante. Primero, con una beca de colaboración del Ministerio. En ella, fui tu aprendiz y me inicié en este mundo de la investigación. Luego, fui alumno, otra vez. En esta ocasión de segundo de Máster. Y lo mismo. Simplemente, impresionantes tus clases. Recordarás que ese semestre fue duro. Te pido disculpas por todo lo que pasó. Me vi

desbordado. A pesar de todo, y por último, he tenido el privilegio de tenerte de tutor en este TFM, teniendo una paciencia infinita conmigo. Más allá de lo bueno que has sido como profesor, y teniendo en cuenta mis cuestiones personales, me has ayudado cuando me ha hecho falta, sobrepasando lo considerado “normal” en una relación profesor-alumno. Una buena parte de este título de Máster es tuyo. Muchas gracias por todo. De corazón.

Por último, agradecer la financiación pública recibida para la realización de este Trabajo Fin de Máster. Así, se ha realizado en el marco del proyecto BIA2017-88770-R, financiado por el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad (MINECO) y la Agencia Estatal de Investigación (AEI), y cofinanciado con los fondos FEDER.

# Índice

## Capítulo 1

<b>Presentación.....</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción.....	1
1.2 El medio poroelástico.....	2
1.3 El Método de Elementos de Contorno (MEC).....	4
1.4 Cálculo de impedancias de cimentaciones rígidas superficiales o embebidas considerando la capa de nivel freático.....	4
1.5 Alcance y objetivos.....	10
1.6 Descripción de contenidos.....	10

## Capítulo 2

<b>Formulación en Elastodinámica lineal y Poroelasticidad armónica.....</b>	<b>11</b>
2.1 Introducción.....	11
2.2 Ecuaciones básicas en Elastodinámica lineal.....	11
2.3 Propiedades del medio poroelástico.....	12
2.4 Ecuaciones básicas del medio poroelástico.....	13
2.4.1 Ecuaciones de equilibrio.....	14
2.4.2 Ley de comportamiento en medio poroelástico .....	15
2.4.3 Ecuaciones de gobierno en medio poroelástico .....	15
2.4.4 Significado físico de las constantes poroelásticas.....	16
2.5 Propagación de ondas en medios elásticos y poroelásticos.....	19
2.5.1 Propagación de ondas en medios elásticos.....	19
2.5.2 Propagación de ondas en medios poroelásticos.....	20
2.6 Formulación integral y solución fundamental armónica.....	24
2.6.1 Formulación integral armónica.....	24
2.6.1.1 Formulación integral en elastodinámica armónica.....	24
2.6.1.2 Formulación integral en poroelasticidad armónica.....	25
2.6.2 Solución fundamental armónica.....	26
2.6.2.1 Solución fundamental elastodinámica.....	26
2.6.2.2 Solución fundamental poroelástica armónica.....	27
2.6.3 Formulación integral en el contorno.....	29

## Capítulo 3

<b>El Método de Elementos de Contorno (MEC).....</b>	<b>32</b>
3.1 Introducción.....	32
3.2 Discretización de contornos.....	33
3.3 Evaluación de las integrales.....	34
3.3.1.1 Integración cuando la singularidad es del tipo .....	35
3.3.1.2 Integración cuando la singularidad es del tipo .....	36
3.4 Condiciones de contorno y formulación en las interfases.....	36
3.4.1 Condiciones exteriores .....	37
3.4.2 Condiciones en las interfases.....	37
3.4.3 Estrategias a seguir en la colocación de nodos.....	38

## Capítulo 4

<b>Interacción suelo-estructura.....</b>	<b>41</b>
4.1 Introducción.....	41

4.2 Matriz de impedancias.....	41
4.3 Cálculo de impedancias.....	44
<b>Capítulo 5</b>	
<b>Verificación con resultados de Abascal y Domínguez [Domínguez y otros, 1993] para semiespacio viscoelástico.....</b>	<b>47</b>
5.1 Descripción general del problema.....	47
5.2 Resultados obtenidos.....	50
5.2.1 Impedancias verticales.....	50
5.2.2 Impedancias horizontales.....	51
5.2.3 Impedancias de cabeceo.....	52
5.2.4 Impedancias de torsión.....	54
5.2.5 Conclusiones.....	54
<b>Capítulo 6</b>	
<b>Verificación con resultados obtenidos por Aznárez, Maeso y Chirino [Aznárez y otros, 1999] en superficie poroelástica.....</b>	<b>55</b>
6.1 Descripción general del problema.....	55
6.2 Segundo problema de validación y resultados obtenidos.....	57
6.3 Tercer problema de validación y resultados obtenidos.....	60
6.4 Cuarto problema de validación y resultados obtenidos.....	63
6.5 Resultados adicionales obtenidos.....	65
6.5.1 Influencia de la densidad añadida sobre la impedancia vertical.....	65
6.5.2 Influencia del amortiguamiento $\xi$ y la constante de disipación $b$ sobre la impedancia vertical.....	66
6.5.3 Influencia del amortiguamiento $\xi$ y la constante de disipación $b$ sobre la impedancia horizontal.....	67
6.5.4 Influencia del amortiguamiento $\xi$ y la constante de disipación $b$ sobre la impedancia cabeceo.....	67
6.6 Conclusiones.....	68
<b>Capítulo 7</b>	
<b>Impedancias para suelos poroelásticos considerando el nivel freático.....</b>	<b>69</b>
7.1 Descripción del problema.....	69
7.2 Datos adicionales.....	71
7.3 Condiciones de contorno.....	72
7.4 Relaciones a calcular.....	72
7.5 Impedancias verticales.....	73
7.6 Impedancias verticales considerando la región superior como viscoelástica.....	77
7.7 Impedancias horizontales.....	78
7.8 Impedancias de cabeceo.....	82
7.9 Impedancias de torsión.....	85
7.10 Consideraciones adicionales sobre resultados obtenidos.....	88
7.11 Conclusiones.....	90
<b>Capítulo 8</b>	
<b>Fidelidad de los modelos de suelo viscoelástico drenado-no drenado equivalentes.....</b>	<b>91</b>
8.1 Descripción del problema.....	91
8.2 Consideraciones adicionales.....	93
8.3 Impedancias verticales.....	93
8.4 Impedancias horizontales.....	96
8.5 Impedancias de cabeceo.....	97

---

8.6 Impedancias de torsión.....	99
8.7 Conclusiones.....	99
<b>Capítulo 9</b>	
<b>Influencia de la constante de disipación.....</b>	<b>101</b>
9.1 Descripción del problema.....	101
9.2 Impedancias verticales.....	102
9.3 Impedancias horizontales.....	105
9.4 Impedancias de cabeceo.....	106
9.5 Impedancias de torsión.....	108
9.6 Conclusiones.....	109
<b>Capítulo 10</b>	
<b>Conclusiones y desarrollos futuros.....</b>	<b>110</b>
10.1 Revisión y conclusiones.....	110
10.2 Desarrollos futuros.....	112
<b>Bibliografía.....</b>	<b>114</b>



## *Índice de tablas*

Tabla 1: Propiedades del terreno viscoelástico a analizar.....	47
Tabla 2: Propiedades fijas para problema de validación.....	56
Tabla 3: Propiedades variables para problema de validación.....	56
Tabla 4: Propiedades del estrato superior considerado como poroelástico con aire en los poros.....	70
Tabla 5: Propiedades del estrato inferior considerado como poroelástico saturado.....	71
Tabla 6: Propiedades del estrato superior considerado como viscoelástico.....	78
Tabla 7: Propiedades del estrato superior (sólido drenado/viscoelástico equivalente).....	92
Tabla 8: Propiedades del estrato inferior (sólido no drenado/viscoelástico equivalente).....	92
Tabla 9: Valores de la permeabilidad y su respectiva constante de disipación a utilizar para comparativa....	101

## *Índice de figuras*

Figura 1: Medio poroelástico.....	2
Figura 2: Problema planteado en este TFM.....	7
Figura 3: Posible modelo para analizar el problema planteado en este TFM.....	7
Figura 4: Posible modelo estructural con rigidez infinita (fig. a) o finita (fig. b) en el empotramiento.....	8
Figura 5: Desplazamiento y dirección de propagación en onda P (a) y onda S (b).....	20
Figura 6: Descomposición del contorno $\Gamma$ en otros dos ( $\Gamma - \Gamma_\epsilon$ ) y $\Gamma_\epsilon$ .....	30
Figura 7: Contorno tridimensional general discretizado con elementos de segundo orden.....	33
Figura 8: Elementos utilizados en el TFM (segundo orden).....	34
Figura 9: Transformación de coordenadas.....	35
Figura 10: Duplicación de nodos en el borde.....	38
Figura 11: Colocación de nodos en esquina y en mallas no conformes.....	40
Figura 12: Contornos a discretizar.....	43
Figura 13: Terrenos no homogéneos.....	44
Figura 14: Modelo axisimétrico y modelo 3D equivalente (doble simetría) con mallado .....	48
Figura 15: Sistema de referencia y punto de aplicación utilizado por Domínguez.....	49
Figura 16: Problema horizontal. Desplazamiento de las impedancias desde el contorno superior al inferior.....	49
Figura 17: Problema de cabeceo. Desplazamiento de las impedancias desde el contorno superior al inferior.....	49
Figura 18: Superposición del problema horizontal y de cabeceo.....	50
Figura 19: Impedancia vertical. Comparativa con resultados de Domínguez. Modelo axisimétrico vs Modelo 3D.....	51
Figura 20: Impedancia horizontal. Comparativa con resultados de Domínguez. Modelo axisimétrico vs Modelo 3D.....	51
Figura 21: Orígenes de los puntos de referencia utilizados para impedancia de cabeceo.....	52
Figura 22: Impedancia de cabeceo. Comparativa con resultados de Domínguez utilizando el origen del sistema 1. Modelo axisimétrico vs Modelo 3D.....	53
Figura 23: Impedancia de cabeceo. Comparativa con resultados de Domínguez utilizando el origen del sistema 2. Modelo axisimétrico vs Modelo 3D.....	53
Figura 24: Impedancia de torsión. Comparativa con resultados de Domínguez. Modelo axisimétrico vs Modelo 3D.....	54
Figura 25: Segundo problema de validación en semiespacio poroelástico con modelo mallado.....	57
Figura 26: Impedancia vertical. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre semiespacio poroelástico.....	58
Figura 27: Impedancia horizontal. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre semiespacio poroelástico.....	58
Figura 28: Impedancia de cabeceo. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre semiespacio poroelástico.....	59
Figura 29: Rigidez dinámica vertical y horizontal. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre semiespacio poroelástico. Influencia de la permeabilidad.....	60
Figura 30: Tercer problema de validación: estrato poroelástico y base con rigidez infinita.....	60
Figura 31: Impedancia vertical. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre estrato de profundidad variable.....	61
Figura 32: Impedancia horizontal. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre estrato de profundidad variable.....	62
Figura 33: Impedancia de cabeceo. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación	

superficial que descansa sobre estrato de profundidad variable.....	63
Figura 34: Cuarto problema de validación: estrato poroelástico y base viscoelástica de rigidez variable.....	63
Figura 35: Impedancia horizontal. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre estrato de rigidez variable.....	64
Figura 36: Influencia de la densidad añadida $\rho_a$ sobre la impedancia vertical. Sin amortiguamiento.....	65
Figura 37: Influencia de la constante de disipación $b$ y del amortiguamiento $\xi$ sobre la impedancia vertical.....	66
Figura 38: Influencia de la constante de disipación $b$ y del amortiguamiento $\xi$ sobre la impedancia horizontal.....	67
Figura 39: Influencia de la constante de disipación $b$ y del amortiguamiento $\xi$ sobre la impedancia de cabeceo.....	68
Figura 40: Modelo utilizado para el cálculo de impedancias considerando la capa freática con mallado.....	69
Figura 41: Impedancia vertical. Grado de embebimiento $E/B = 0$ . Influencia del nivel freático.....	73
Figura 42: Impedancia vertical. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ . Influencia del nivel freático.....	74
Figura 43: Impedancia vertical. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ . Influencia del nivel freático. Corrección de resultados.....	74
Figura 44: Impedancia vertical. Grado de embebimiento $E/B = 0,5$ . Influencia del nivel freático.....	75
Figura 45: Impedancia vertical. Grado de embebimiento $E/B = 0,5$ . Influencia del nivel freático. Corrección de resultados.....	75
Figura 46: Impedancia vertical. Grado de embebimiento $E/B = 1$ . Influencia del nivel freático.....	76
Figura 47: Impedancia vertical. Grado de embebimiento $E/B = 2$ . Influencia del nivel freático.....	76
Figura 48: Impedancia vertical. Grado de embebimiento $E/B = 4$ . Influencia del nivel freático.....	77
Figura 49: Modelo alternativo para el cálculo de impedancias considerando la capa freática (estrato superior viscoelástico).....	77
Figura 50: Comparativa de modelos. Poroelástico-aire/Poroelástico-agua vs Viscoelástico/Poroelástico-agua.....	78
Figura 51: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento $E/B = 0$ . Influencia del nivel freático.....	79
Figura 52: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ . Influencia del nivel freático.....	79
Figura 53: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento $E/B = 0,5$ . Influencia del nivel freático.....	80
Figura 54: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento $E/B = 1$ . Influencia del nivel freático.....	80
Figura 55: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento $E/B = 2$ . Influencia del nivel freático.....	81
Figura 56: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento $E/B = 4$ . Influencia del nivel freático.....	81
Figura 57: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento $E/B = 0$ . Influencia del nivel freático.....	82
Figura 58: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ . Influencia del nivel freático.....	83
Figura 59: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento $E/B = 0,5$ . Influencia del nivel freático.....	83
Figura 60: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento $E/B = 1$ . Influencia del nivel freático.....	84
Figura 61: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento $E/B = 2$ . Influencia del nivel freático.....	84
Figura 62: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento $E/B = 4$ . Influencia del nivel freático.....	85
Figura 63: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento $E/B = 0$ . Influencia del nivel freático.....	85
Figura 64: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ . Influencia del nivel freático.....	86
Figura 65: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento $E/B = 0,5$ . Influencia del nivel freático.....	86
Figura 66: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento $E/B = 1$ . Influencia del nivel freático.....	87
Figura 67: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento $E/B = 2$ . Influencia del nivel freático.....	87
Figura 68: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento $E/B = 4$ . Influencia del nivel freático.....	88
Figura 69: Impedancia vertical. Grado de embebimiento $E/B = 0$ . Cálculo a bajas frecuencias.....	88
Figura 70: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento $E/B = 0$ . Cálculo a bajas frecuencias.....	89
Figura 71: Modelo alternativo sólido drenado/no drenado para el cálculo de impedancias considerando la capa freática.....	91
Figura 72: Impedancia vertical. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 0$ .....	93
Figura 73: Impedancia vertical. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ .....	94

Figura 74: Impedancia vertical. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 0,5$ .....	94
Figura 75: Impedancia vertical. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 2$ .....	95
Figura 76: Impedancia vertical. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 4$ .....	95
Figura 77: Impedancia horizontal. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 0$ .....	96
Figura 78: Impedancia horizontal. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ .....	96
Figura 79: Impedancia horizontal. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 4$ .....	97
Figura 80: Impedancia de cabeceo. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ .....	97
Figura 81: Impedancia de cabeceo. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 0,5$ .....	98
Figura 82: Impedancia de cabeceo. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento $E/B = 2$ .....	98
Figura 83: Impedancia de torsión. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grados de embebimiento $E/B = 0,5$ y $E/B = 2$ .....	99
Figura 84: Impedancia vertical. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 0$ .....	102
Figura 85: Impedancia vertical. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ .....	103
Figura 86: Impedancia vertical. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 0,5$ .....	103
Figura 87: Impedancia vertical. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 2$ .....	104
Figura 88: Impedancia vertical. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 4$ .....	104
Figura 89: Impedancia horizontal. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 0$ .....	105
Figura 90: Impedancia horizontal. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ .....	105
Figura 91: Impedancia horizontal. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 4$ .....	106
Figura 92: Impedancia de cabeceo. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 0,25$ .....	107
Figura 93: Impedancia de cabeceo. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 0,5$ .....	107
Figura 94: Impedancia de cabeceo. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento $E/B = 2$ .....	108
Figura 95: Impedancia de torsión. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grados de embebimiento $E/B = 0,5$ y $E/B = 2$ .....	108

# ***Capítulo 1***

## ***Presentación***

### ***1.1 Introducción***

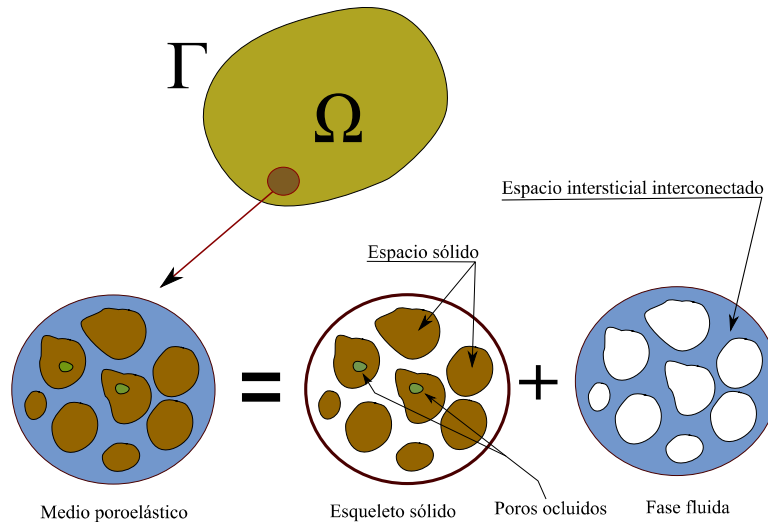
El nivel de implantación que ha alcanzado la energía eólica está provocando que cada vez resulte más difícil encontrar emplazamientos óptimos para la instalación de aerogeneradores. A día de hoy, se están construyendo parques eólicos en zonas anteriormente descartadas por las malas prestaciones del terreno de cimentación, dado el mayor coste y dificultad que supone la implantación en estos emplazamientos. Entre estas malas prestaciones se pueden citar, por ejemplo, la escasa resistencia del suelo y la presencia de agua a la cota de cimentación o en estratos más profundos.

Sin duda, el desarrollo de los medios informáticos de los últimos años y su uso generalizado por investigadores y calculistas ha permitido abordar modelos numéricos cada vez más complejos capaces de representar mejor diversos problemas de ingeniería. En particular, el comportamiento dinámico de estructuras está fuertemente influenciado, entre otros factores, por la interacción de las regiones involucradas. En este Trabajo Fin de Máster (TFM) se aborda el cálculo de impedancias de cimentaciones a base de zapatas rígidas utilizadas habitualmente en aerogeneradores en situaciones en las que el terreno es poco competente debido a la presencia de agua, bien porque en su totalidad se encuentra por debajo del nivel freático, o bien porque encontrándose a una mayor profundidad, esté relativamente próximo a la cota de cimentación. Como se justificará a lo largo de este trabajo, la caracterización de este tipo de suelos como un medio poroelástico unido al método numérico que aborda la solución de problema conduce a resultados altamente fiables.

A continuación, se hace una breve descripción de los medios poroelásticos (sección 1.2). En la sección 1.3, se introduce el método numérico que permite abordar la solución de problemas en los que existen regiones que pueden caracterizarse como este tipo de medios. En la sección 1.4

se esboza el problema que se aborda con el presente trabajo. En la sección 1.5 se presenta el alcance y objetivos del trabajo. Finalmente, en el apartado 1.6, se hace una descripción de contenidos del presente documento.

## 1.2 El medio poroelástico



Un medio poroelástico es un material con huecos en su interior (poros) los cuales pueden estar rellenos de un fluido (figura 1), que, normalmente, será agua, aire o una mezcla ambos. Los poros se pueden encontrar aislados o unidos entre sí. Dependiendo de cómo sea la comunicación de estos poros, la porosidad, uno de las principales propiedades que

Figura 1: Medio poroelástico

gobiernan el comportamiento de estos medios, se puede clasificar como:

- Porosidad total: se define como la fracción del volumen total del material que no está ocupado por matriz.
- Porosidad interconectada o efectiva: se define como el volumen total del material que representa espacios que pueden contener fluidos y se encuentran comunicados entre sí.
- Porosidad no interconectada o no efectiva: se define como la fracción del volumen total del material que está conformada por los espacios que pueden contener fluidos pero no están comunicados entre sí.

De lo anterior se obtiene que la porosidad total es la suma de las otras dos definidas. El carácter bifásico del medio poroso, esto es, la posibilidad de que el medio fluido transite a través de la matriz sólida, se produce únicamente por lo que se ha denominado porosidad interconectada. Por tanto, en lo sucesivo se llamará porosidad (o índice de poros) a esta porosidad efectiva. La existencia de otro tipo de porosidad (no interconectada o no efectiva), simplemente modificará, a un nivel macroscópico, las propiedades de la matriz sólida (su densidad y sus características mecánicas). Si los poros interconectados están completamente llenos de líquido se dirá que el

medio poroelástico está saturado. Sin embargo, si en el interior de estos intersticios existe fluido en fase gaseosa, lo que provoca que la fase líquida no ocupa completamente los poros de la matriz sólida, será un medio cuasisaturado. A modo de ejemplo, esto puede visualizarse como un líquido que tiene disueltas pequeñas burbujas de aire.

Muchos elementos naturales (como por ejemplo algunos tipos de rocas, suelos saturados de agua, acuíferos, lechos de sedimentos y bolsas de petróleo), algunos tejidos biológicos (tales como huesos, madera y corcho) y determinados materiales artificiales (tales como cementos y cerámicas) pueden ser considerados como medios porosos.

A pesar de la naturaleza bifásica del medio poroelástico realizada, es posible abordar su comportamiento a nivel macroscópico estableciendo unas propiedades medias del mismo de forma tal que sean de aplicación las hipótesis de isotropía y homogeneidad clásicas de la mecánica del medio continuo.

Terzaghi (1925) observó un fenómeno por el cual a un suelo o medio cuando se le aplica una carga sostenida en el tiempo experimenta, aparte de una deflexión instantánea, un asentamiento de manera continua y gradual en el tiempo. Este fenómeno es conocido como consolidación de suelo, y es especialmente pronunciado en determinados tipos de suelos como son las arenas y arcillas saturadas. Así, Terzaghi lograba, mediante un medio poroelástico, modelar de manera plausible el fenómeno ampliamente observado de la consolidación de suelos, pues este tipo de material también presenta una deflexión prolongada en el tiempo al someterse a una carga sostenida, la cual depende de la velocidad a la que la fase fluida es expulsada de los intersticios de la fase sólida. Sin embargo, el modelo de Terzaghi tenía la limitación de referirse solo al caso monodimensional.

Fue Biot quien desarrolló una serie de artículos aparecidos en 1941 relativos al caso isótropo y estático. En los años 1955 y 1956 presentó el mismo autor la teoría general referente al caso anisótropo y en 1956 la ampliación al caso dinámico, estableciendo la teoría de propagación de ondas en medios poroelásticos saturados. Otras contribuciones que han tenido un papel relevante en el desarrollo de la teoría general de medios poroelásticos saturados son las siguientes: Biot (Biot y otros, 1957), Biot (1962), Skempton (1954), Rice (Rice y otros, 1976) y Stoll (1977). También es destacable el trabajo de Domínguez (1995), el cual realiza un resumen de la formulación, tanto estática como dinámica, de la Poroelasticidad.

En este TFM, el suelo saturado de agua en el que descansa la zapata cuya impedancia se

calcula, se ha caracterizado como un medio poroelástico de acuerdo a la formulación de Biot.

### ***1.3 El Método de Elementos de Contorno (MEC)***

Uno de los métodos numéricos más utilizados para abordar problemas en Ingeniería Civil es el Método de Elementos Finitos (MEF). Sin embargo, este método tiene una serie de debilidades cuando se trata de problemas de propagación de ondas en regiones seminfinitas (suelo bajo la cimentación). Este método requiere la construcción de una malla tridimensional que ha de ser truncada a cierta distancia del área de interés. Sin el tratamiento apropiado, dicho truncamiento refleja parte de la energía producida en el dominio, y por tanto no permite cumplir la condición de radiación en el infinito de Sommerfeld (la energía radiada por una fuente debe desvanecerse en el infinito).

Una técnica que no se ve afectada por el problema de truncar la malla a una cierta distancia de la zona de estudio es el Método de Elementos de Contorno (MEC), el cual permite abordar de manera muy natural dominios infinitos y seminfinitos.

Su aplicación requiere formular dichas ecuaciones en el contorno de las regiones constituyendo la denominada formulación integral en el contorno. La formulación integral relaciona las variables primarias del problema (desplazamientos y/o presiones) y sus derivadas (tensiones y/o derivada de la presión) a través de un problema de referencia (solución fundamental). La resolución numérica de estas ecuaciones hace necesario discretizar el contorno en elementos y aproximar las variables del problema en función de los valores que adopta estas en los nodos de los elementos. Con todo esto y un conjunto de soluciones fundamentales independientes, la igualdad integral en el contorno de partida podrá transformarse en un sistema de ecuaciones algebraicas que permitirá la obtención de una solución aproximada del problema.

La División de Mecánica del Medio Continuo y Estructuras del IUSIANI lleva años desarrollando códigos basados en MEC y, actualmente, dispone de un nuevo software llamado *Multifebe* el cual será el empleado en este TFM.

### ***1.4 Cálculo de impedancias de cimentaciones rígidas superficiales o embebidas considerando la capa de nivel freático***

Un adecuado diseño del conjunto aerogenerador-cimentación hace imprescindible conocer su comportamiento dinámico. Este se ve fuertemente influenciado por los fenómenos de interacción suelo-



estructura que se pueden resumir en una serie de efectos cinemáticos e inerciales producidos en la estructura y el suelo como resultado de la flexibilidad de este último, fenómenos que adquieren más importancia a medida que el suelo de cimentación se vuelve más blando.

Se define la impedancia o rigidez dinámica de una cimentación como la relación entre una fuerza (momento) aplicada a una cimentación rígida carente de masa y el desplazamiento (rotación) resultante. En el caso de dinámica armónica las funciones de impedancia son números complejos que relacionan tanto la magnitud como la fase de las fuerzas aplicadas a la cimentación con los desplazamientos resultantes.

Así, una manera clásica de caracterizar esta interacción es calcular la impedancia de la cimentación, ya que permite construir un modelo simple y realista del problema de cara al análisis dinámico del conjunto, sustituyendo el terreno por resortes y amortiguadores que representan adecuadamente la interacción. Una vez caracterizado el terreno con estos resortes y amortiguadores, es posible someter al conjunto a cargas dinámicas para ver su comportamiento (respuesta).

Existen, entre otros, dos métodos para obtener la respuesta completa de un sistema estructural: los métodos directos y el de los tres pasos [ver, por ejemplo, Medina (2015)].

En los métodos directos o de un paso, la estructura y el suelo se analizan conjuntamente mediante un método numérico (MEF, MEC, etc...). La solución puede ser obtenida en el dominio del tiempo, procedimiento que permite, por ejemplo, tener en cuenta el comportamiento no lineal de la estructura y del suelo; o en el dominio de la frecuencia, obteniendo las funciones de transferencia para cada valor de la frecuencia de excitación mediante la solución de un sistema de ecuaciones lineales, correspondientes a la transformada de Fourier de las ecuaciones de equilibrio. La respuesta en el dominio del tiempo se obtiene aplicando la transformada inversa de Fourier al producto compuesto por dichas funciones de transferencia y la transformada de Fourier de la excitación. El primer procedimiento es generalmente más costoso debido a que los algoritmos usados son condicionalmente estables dependiendo del intervalo de integración, y este parámetro es a veces inaceptablemente pequeño. Por su parte, el método en el dominio de la frecuencia, en algunos casos se vuelve igualmente costoso cuando el número de frecuencias necesarias es elevado, no pudiéndose simular el comportamiento no lineal del suelo, debiendo recurrir a su linealización.

El método de los tres pasos se basa en la técnica de subestructuración (se considera separadamente la estructura y el suelo). El procedimiento de análisis se basa en el cálculo sucesivo de tres problemas:

- a) Determinación de los desplazamientos de la cimentación, considerada infinitamente rígida, sin masa y libre de la estructura apoyada en ella, sujeta a un tren de ondas incidente a través del suelo, o a un movimiento del contorno provocado por la incidencia de las ondas sísmicas (solo para el caso de estudios sísmicos).
- b) Cálculo de la rigidez dinámica de la cimentación, supuesta rígida y sin masa, mediante la aplicación de movimientos unitarios y evaluación de los esfuerzos producidos en los contornos interfase entre la cimentación y el terreno.
- c) Determinación de la respuesta de la estructura suponiéndola apoyada sobre resortes y amortiguadores (modelos dinámicos que representan el suelo flexible) cuyas características se han obtenido en el paso b), sometida a los desplazamientos calculados en a).

Si se admiten las hipótesis usuales de comportamiento elástico y lineal, el análisis puede ser desarrollado en el dominio de la frecuencia. En este sentido, este segundo método presenta los inconvenientes de no poder simular el comportamiento no lineal del suelo y el hecho de no poder incluir la influencia que sobre las propiedades del suelo ejerce la estructura (que a su vez tienen un efecto importante sobre tensiones producidas en la interfase suelo-cimentación), al no estar presente esta en los pasos a) y b).

Sin embargo, los modelos son más simples y permite realizar análisis de sensibilidad basados en distintas hipótesis a lo largo de los tres pasos, obteniéndose una información más completa de la influencia de los distintos factores que intervienen en el problema.

Antes de exponer el problema planteado en este TFM se definirá qué se entiende por zapata rígida, por ser estas las que se utilizarán en la obtención de impedancias. La Instrucción de Hormigón Estructural (EHE) define dos tipos de zapatas: rígidas o flexibles. Primero define una distancia, llamada vuelo ( $v_{\max}$ ), que según sean las características constructivas de la cimentación, tendrá un valor. Para los propósitos de este TFM, bastará con definirla como la distancia que hay desde el exterior de la base del aerogenerador hasta el exterior de la zapata, medida paralelamente al suelo. Conocida esa distancia, la cimentación se clasifica como rígida si  $v_{\max}$  es menor o igual que  $2h$ , siendo  $h$  el canto de la zapata.

Así, según sean de un tipo u otro tienen un comportamiento, y, por tanto, análisis distinto. Cuando son sometidas a carga, las rígidas se pueden asimilar a un sólido rígido. Con esta propiedad es posible obtener el comportamiento del conjunto conociendo el comportamiento de solo una partícula. Así, se pueden simplificar los cálculos enormemente. Las flexibles no cumplen esta propiedad, se

dimensionan con la Teoría General de Flexión y quedan fuera del ámbito de este TFM.

Respecto del problema que se plantea en este TFM, gráficamente es el de la figura 2. Se trata de un aerogenerador que descansa sobre un terreno seco y, a cierta profundidad, habrá terreno saturado con agua, es decir, que no admite más capacidad de absorción de agua (nivel freático).



Figura 2: Problema planteado en este TFM

En la figura 3 se muestra un esquema del problema de interacción zapata-suelo y un ejemplo de la discretización empleada para abordarlo mediante el MEC:

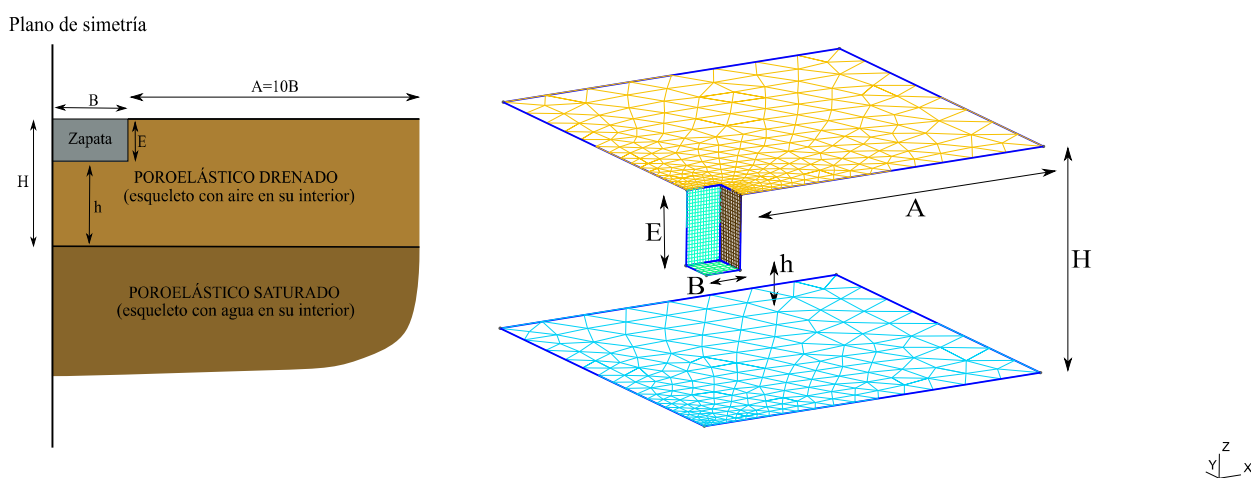


Figura 3: Posible modelo para analizar el problema planteado en este TFM

El terreno tiene dos regiones, una superior y otra inferior. La superior está compuesta de una matriz (esqueleto sólido) y no tiene agua (drenado), ocupando su lugar aire. La inferior está compuesta de una matriz (esqueleto sólido), que podrá ser igual o no que la superior, y el volumen de los poros está totalmente ocupado por agua, no admitiendo más (estado saturado). Respecto del mallado se observa que solo se discretizan los contornos, y ello es debido a que se utilizará el MEC.

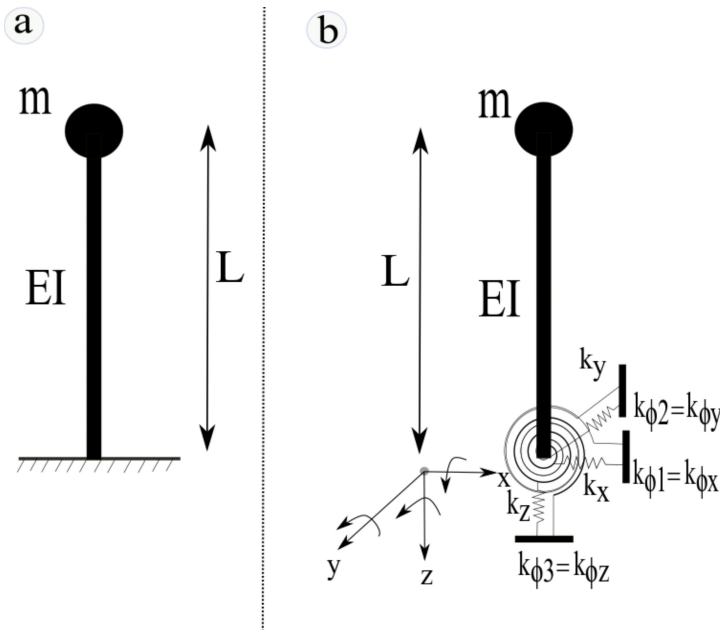


Figura 4: Posible modelo estructural con rigidez infinita (fig. a) o finita (fig. b) en el empotramiento

Un posible modelo estructural para el aerogenerador puede ser un pilar en voladizo con la masa del conjunto concentrada en el extremo no empotrado y el empotramiento se podrá considerar idealmente con rigidez infinita (figura a) o más realísticamente con cierta rigidez finita (figura b).

El problema de cálculo de la impedancia es un problema clásico abordado por infinidad de autores en los últimos tiempos. Por ejemplo, la formulación en el dominio de la

frecuencia para obtener rigideces de cimentaciones rectangulares descansando sobre, o embebidas en, un semiespacio viscoelástico fue propuesta primero por Domínguez (1978a, b), Ottenstreuer y Schmid (1981) y Ottenstreuer (1982), siguiendo la misma aproximación para estudiar, respectivamente, rigideces dinámicas de cimentaciones y la interacción cruzada entre dos cimentaciones. Domínguez y Alarcón (1981a) investigaron funciones de forma singulares en el estudio de cimentaciones rígidas. Domínguez (1981) y Domínguez y Abascal (1982) estudiaron el método de las imágenes aplicado al cálculo de rigideces estáticas y dinámicas de cimentaciones enterradas cuadradas tridimensionales. Asimismo, suelos no-homogéneos han sido estudiados por Abascal (1984) y Abascal y Domínguez (1986). Apsel (1979) usó el MEC indirecto en combinación con funciones de Green semiexplícitas para calcular rigideces de cimentaciones circulares embebidas en un semiespacio estratificado. Rigideces dinámicas de cimentaciones circulares sobre la superficie o embebidas en suelos estratificados se han calculado usando el MEC directo por Gómez-Lera et al. (1985), Alarcón et al. (1989) y Emperador y Domínguez (1989). El MEC ha sido también usado para calcular rigideces dinámicas de cimentaciones cuando existe separación suelo-estructura, por Spyrakos y Patel (1987), Hillmer y Schmid

(1988), y Abascal y Domínguez (1990).

Respecto al grupo de investigación de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria en el cual se desarrollará este TFM, llevan años aplicando con éxito códigos basados en el MEC para la resolución de problemas de Ingeniería Civil. Por ejemplo, en la respuesta sísmica de presas bóveda, prestando especial atención a la influencia de la presencia de sedimentos en el fondo del embalse. Dicho grupo ha creado modelos 3D de presas bóveda (Maeso y otros, 2002b) y (Aznárez y otros, 2004) donde la interacción entre el sedimento y las restantes regiones implicadas es tenida en cuenta de forma rigurosa mediante la aplicación de ecuaciones de equilibrio y compatibilidad adicionales en los nodos de las interfases. El considerar el sedimento como un medio bifásico permite obtener resultados más próximos a la realidad física de su comportamiento a cambio, eso sí, de un coste computacional considerablemente mayor. Este trabajo avanza en una línea de investigación iniciada por el Profesor de la Universidad de Sevilla José Domínguez y que arranca con Medina (1987) en la que se analiza la respuesta sísmica de presas de gravedad a través de un modelo bidimensional de elementos de contorno donde coexisten regiones viscoelásticas (presa y terreno) y fluidas (agua embalsada) y tiene su principal referente en las investigaciones de Maeso y Domínguez [(Maeso, 1992), (Maeso y otros, 1993) y (Domínguez y otros, 1993)] que generalizan esta estrategia a problemas tridimensionales permitiendo el estudio dinámico de presas bóveda. Además, en la tesis doctoral de Aznárez (2002) se completa el modelo tridimensional con la inclusión de los sedimentos caracterizados como un medio poroelástico, manteniéndose el acoplamiento riguroso entre los tres tipos de regiones que el modelo es capaz manejar: elásticas o viscoelásticas, potenciales y poroelásticas.

Respecto de problemas de interacción suelo-estructura, han tratado problemas de cimentaciones pilotadas en distintas Tesis Doctorales [(Padrón, 2009), (García, 2012), (Medina, 2015), o (Santana, 2015)]. Se han estudiado problemas en los que solo hay un pilote o varios. En el caso de varios, han estudiado el cómo afecta al resultado la interacción de un elemento sobre el conjunto.

Por último, respecto del cálculo de impedancias de cimentaciones no pilotadas, han aparecido una serie de artículos tratando de dar continuación a trabajos anteriores. Así, Aznárez (1999) sigue estudiando las rigideces dinámicas (vertical, horizontal y cabeceo), todavía de cimentaciones superficiales, pero utilizando un modelo tridimensional. Por otra parte, Maeso (1999), ya se enfrenta al caso de cimentaciones embebidas, para las cuales calculará la impedancia vertical, utilizando el mismo modelo que Aznárez. Además, Gracia (2002) continua con el cálculo de impedancias sobre medios poroelásticos para cimentaciones superficiales o embebidas. Con este TFM se pretende dar continuidad a todo el trabajo anterior de estos investigadores.

## **1.5 Alcance y objetivos**

La determinación de la respuesta estructural asumiendo condiciones de apoyo ideales, por ejemplo mediante un empotramiento, permite un análisis sencillo y, en muchas ocasiones, suficiente. Sin embargo, cuando se trata de estructuras sometidas a cargas operacionales de carácter dinámico, como es el caso de aerogeneradores, es muy importante incluir condiciones de apoyo más realistas a fin de poder evaluar correctamente si alguna de las frecuencias naturales es cercana a alguna de las de excitación, en cuyo caso la vida útil del aerogenerador puede verse reducida.

Con este TFM se pretende contribuir al estudio de este tipo de problemas empleando como técnica numérica el Método de Elementos de Contorno (MEC) en un modelo tridimensional de elementos de contorno para medios viscoelásticos y poroelásticos, que permitirá obtener las impedancias de cimentaciones superficiales o embebidas.

El terreno se considerará un medio estratificado, siendo de tipo poroelástico con aire en su interior la región superior y poroelástico con agua en su interior en la inferior. Así, será posible modelizar el nivel freático. Además, se comparará este modelo con otro, habitualmente utilizado, que, para modelizar la región freática, considera el medio superior como viscoelástico con propiedades de esqueleto sólido (sólido drenado) y el medio inferior como viscoelástico con propiedades de sólido no drenado. Por último, se estudiará la influencia de la constante de disipación del poroelástico saturado sobre los resultados.

## **1.6 Descripción de contenidos**

En el Capítulo 2 se repasarán las ecuaciones de gobierno básicas, esto es, se hará un repaso sobre Elastodinámica y Poroelasticidad. En el Capítulo 3 se verá la técnica numérica empleada (MEC) para la resolución de las ecuaciones de gobierno. En el Capítulo 4 se estudiará el problema de interacción cimentación-suelo. En los Capítulos 5 y 6 se resolverán una serie de problemas cuya solución es conocida para validar el nuevo código MEC. Una vez comprobada la validez del código, se procederá a obtener las impedancias de un terreno que se modelizará como de dos regiones, la superior será de tipo poroelástica con aire en su interior con diferentes alturas  $H$  y la inferior será poroelástica con agua en su interior. Luego, se analizarán los resultados obtenidos. Por último, se resolverá una muestra de los problemas resueltos anteriormente cambiando la constante de disipación para ver cómo influye en los resultados.

## Capítulo 2

# Formulación en Elastodinámica lineal y Poroelasticidad armónica

### 2.1 Introducción

En este capítulo se desarrollan las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento dinámico de los medios que se presentan aquí, estos son, sólidos elásticos y medios poroelásticos. Se comienza con las ecuaciones básicas de la Elastodinámica lineal. Luego, se describe el medio poroelástico y sus ecuaciones básicas de gobierno. Para un estudio más en profundidad, consultar Aznárez (2002).

### 2.2 Ecuaciones básicas en Elastodinámica lineal

Las ecuaciones de equilibrio responden a:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \cdot \ddot{u}_i \quad (1)$$

donde  $\sigma_{ij,j}$  es el tensor de tensiones (simétrico),  $X_i$  son las componentes de las fuerzas de volumen y  $\rho$  es la densidad del material.

Por otro lado, el tensor de pequeñas deformaciones se define como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

Por último, la relación entre el tensor de tensiones y deformaciones se establece con la ley de comportamiento llamada ley de Hooke, que para materiales homogéneos, isótropos, elásticos y lineales es:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot e \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

siendo  $\lambda = \frac{2 \cdot G \cdot \nu}{1 - 2 \cdot \nu}$  la constante de Lamé,  $e = \varepsilon_{kk}$  es la dilatación volumétrica del medio,  $\delta_{ij}$  la

delta de Kronecker y  $G$  el módulo elasticidad transversal.

En problemas tridimensionales, las ecuaciones (1), (2) y (3) constituyen un sistema de 15 ecuaciones con dependencia temporal y espacial.

Este sistema puede ser condensado sustituyendo (2) en (3) y el resultado en (1), obteniendo la ecuación de Navier:

$$G \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + G) \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad (4)$$

Para obtener (4) en el dominio de la frecuencia, se asume un desplazamiento armónico del tipo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t}$ . Operando se obtiene:

$$G \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + G) \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{X} = -\omega^2 \cdot \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad (5)$$

### 2.3 Propiedades del medio poroelástico

El modelo planteado por Biot cumple con las propiedades de isotropía, homogeneidad (con unas propiedades medias del material en el que cualquier discontinuidad es mucho menor que la longitud característica), comportamiento elástico, lineal y rango de trabajo de pequeñas deformaciones y desplazamientos.

Como primer paso, se definirán una serie de magnitudes geométricas, estáticas y cinemáticas, que tratan de representar el comportamiento del material. Estas son:

1.- Porosidad ( $\Phi$ ): es la relación entre el volumen de intersticios y el volumen total del material homogéneo. Este concepto se refiere al volumen de los poros interconectados, en ningún caso al ocupado por los poros aislados, los cuales son considerados como parte del material sólido y simplemente alterarán las propiedades de este si son abundantes. La porosidad se considera una constante del material, y es igualmente la relación entre el área de poros y el área total en una sección de material cualquiera.

$$\Phi = \frac{V_p}{V} = \frac{A_p}{A} \quad (6)$$

2.- Vector de desplazamientos en el sólido ( $u_i$ ).

3.- Vector de desplazamientos en el fluido ( $U_i$ ).

4.- Tensor de tensiones totales sobre material homogéneo ( $\sigma_{ij}$ ).

5.- Presión de poro ( $p$ ): es la presión del fluido en los intersticios. Se puede entender como la presión que debería existir en un recipiente lleno del mismo fluido para que, puesto en contacto con el sólido poroelástico, no se produzca intercambio alguno de fluido entre el medio y el recipiente.

6.- Tensor de tensión efectiva ( $\sigma'_{ij}$ ): (también llamada tensión efectiva de Terzaghi, por ser este



autor quien introdujo su uso). Es la tensión en exceso sobre la presión de poro a la que está sometido el material. En general, es la tensión que caracteriza el fallo de estos materiales.

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} \cdot p \quad (7)$$

7.- Tensión equivalente en el fluido: es la presión del fluido en los intersticios referida al área total del material homogéneo en una sección cualquiera.

$$\tau = -\phi \cdot p \quad (8)$$

8.- Tensor de tensiones equivalentes sobre el esqueleto sólido (  $\tau_{ij}$  ):

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} \cdot \phi \cdot p \quad (9)$$

9.- Tensor de deformaciones en el esqueleto sólido (  $\epsilon_{ij}$  ): deformaciones experimentadas por la fase sólida del medio poroso (esqueleto sólido).

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

siendo la dilatación del esqueleto:

$$e = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = u_{i,i} \quad (11)$$

10.- Dilatación del fluido:

$$\epsilon = U_{1,1} + U_{2,2} + U_{3,3} = U_{i,i} \quad (12)$$

11.- Desplazamiento relativo del fluido respecto al sólido:

$$w_i = U_i - u_i \quad (13)$$

12.- Incremento del contenido del fluido en el material homogéneo (  $\zeta$  ): se puede definir como la cantidad de volumen de fluido que entra en los poros por unidad de volumen del material homogéneo:

$$\zeta = -\phi \cdot w_{i,i} = -\phi (\epsilon - e) \quad (14)$$

13.- Vector de descarga (  $q_i$  ): es la velocidad del fluido saliente del medio poroso. Es decir, el volumen de fluido por unidad de área y unidad de tiempo que abandona el sólido poroelástico:

$$q_i = \phi \cdot (\dot{U}_i - \dot{u}_i) \quad (15)$$

## ***2.4 Ecuaciones básicas del medio poroelástico***

Como en todo problema de Mecánica del Medio Continuo, en el medio poroelástico hay unas ecuaciones de equilibrio que incluyen las fuerzas de inercia y disipación, y una ley de comportamiento, que relaciona tensiones y deformaciones. Las combinación de las ecuaciones de

equilibrio y la ley de comportamiento permite obtener una ecuación de onda, que depende de los desplazamientos de ambas fases, que será la que describa su comportamiento dinámico.

### 2.4.1 Ecuaciones de equilibrio

La ecuación de equilibrio en términos de tensiones totales para el caso dinámico es:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho_1 \cdot \ddot{u}_i + \rho_2 \cdot \ddot{U}_i \quad (16)$$

donde:

- $X_i$  es la fuerza por unidad de volumen sobre el material homogéneo.
- $\rho_1 = (1 - \phi) \rho_s$  es la densidad del esqueleto sólido (o del material sólido referida al volumen del material homogéneo), y  $\rho_s$  es la densidad del material sólido.
- $\rho_2 = \phi \cdot \rho_f$  la densidad del fluido referida al volumen del material homogéneo, y  $\rho_f$  es la densidad del fluido.

La ley que gobierna el movimiento de la fase fluida en el interior de los intersticios del medio poroso (ley de Darcy), en este caso, se transforma de modo que el gradiente de presiones de fluido en la dirección perpendicular a una sección de un medio poroso tiene que vencer no solo la resistencia del esqueleto a ser traspasado por el fluido sino también las fuerzas de inercia. Así:

$$-p_{,i} + f_i = \frac{1}{\chi} \cdot q_i + \rho_f \cdot \ddot{U}_i + \frac{\rho_a}{\phi} (\ddot{U}_i - \ddot{u}_i) \quad (17)$$

donde aparece el término de inercia del fluido  $\rho_f$ ,  $\ddot{U}_i$  y un término adicional que depende de las aceleraciones relativas entre los dos componentes y tiene en cuenta que no todo el fluido se mueve en la dirección del gradiente macroscópico de presiones sino que recorre los intersticios. Así, el parámetro  $\rho_a$ , conocido como densidad añadida, depende de la configuración de los intersticios, y debe ser obtenido experimentalmente.

La anterior ecuación puede ser escrita en términos de la tensión equivalente en el fluido  $\tau_{,i}$ , y de los desplazamientos en sólido y fluido. Así:

$$\tau_{,i} + X'_i = \rho_{12} \cdot \ddot{u}_i + \rho_{22} \cdot \ddot{U}_i - b \cdot (\dot{u}_i - \dot{U}_i) \quad (18)$$

donde:

- $X'_i$  es la fuerza sobre el fluido por unidad de volumen del medio poroso
- $\rho_{12} = -\rho_a$ ;  $\rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}$
- $b$  es un parámetro llamado constante de disipación

$$b = \frac{\phi^2}{\chi} = \frac{\phi^2 \cdot \mu_o}{k} \quad (19)$$

Esta constante  $b$  representa las fuerzas de viscosidad por unidad de volumen y por unidad de velocidad relativa del fluido respecto de la matriz sólida. La variable  $k$  es la permeabilidad de Darcy,  $\mu_0$  es la viscosidad y  $\phi$  es la porosidad. De lo anterior se deduce que, cuando la velocidad relativa de ambas fases sea nula, no hay disipación.

Al igual que las ecuaciones (18) están en función de  $\tau$ , la ecuación de equilibrio (16) puede escribirse en términos de las tensiones sobre el esqueleto sólido  $\tau_{ij}$ , tal y como hizo Biot. Para ello solo hay que utilizar la expresión  $\sigma_{ij} = \tau_{ij} + \tau \cdot \delta_{ij}$  y, teniendo en cuenta la anterior ecuación, se obtiene:

$$\tau_{ij,j} + X_i = \rho_{11} \cdot \ddot{u}_i + \rho_{12} \cdot \ddot{U}_i + b \cdot (\dot{u}_i - \dot{U}_i) \quad (20)$$

donde:

$$\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12} ; \rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12} ; \rho_{12} = -\rho_a$$

### 2.4.2 Ley de comportamiento en medio poroelástico

Las ecuaciones (18) y (20) constituyen un sistema de seis ecuaciones de equilibrio dinámico sobre los componentes líquido y sólido. Empleándolas junto a las leyes de comportamiento, que proporcionan las tensiones en ambos medios en función de sus desplazamientos, permiten plantear el problema en términos de las variables cinemáticas de cada fase. De esta manera, puede obtenerse un sistema de seis ecuaciones diferenciales, con sus correspondientes incógnitas, en el que estas son las seis componentes de los desplazamientos  $u_i$  y  $U_i$ . Estas ecuaciones, junto con las condiciones de contorno y las condiciones iniciales, necesarias al ser un sistema diferencial, tanto espacial como temporal, definirían totalmente el problema para su resolución en términos de  $u_i$  y  $U_i$ . Con objeto de emplear una nomenclatura igual a la original de Biot, se utilizará como parámetros característicos del material las constantes  $\lambda$ ,  $G$ ,  $Q$  y  $R$ . Así, es posible escribir la ley de comportamiento como:

$$\tau = Q \cdot e + R \cdot \varepsilon \quad (21)$$

$$\tau_{ij} = 2G \cdot \varepsilon_{ij} + \left( \lambda + \frac{Q^2}{R} \right) \cdot e \cdot \delta_{ij} + Q \cdot \varepsilon \cdot \delta_{ij} \quad (22)$$

### 2.4.3 Ecuaciones de gobierno en medio poroelástico

Finalmente, sustituyendo (21) y (22) sobre las ecuaciones de equilibrio (18) y (20) se obtendrán las ecuaciones de campo del caso dinámico. Estas son:

$$G \cdot \nabla^2 u_i + \left( \lambda + G + \frac{Q^2}{R} \right) \cdot e_{,i} + Q \cdot \varepsilon_{,i} + X_i = (\rho_{11} \cdot \ddot{u}_i + \rho_{12} \cdot \ddot{U}_i) + b \cdot (\dot{u}_i - \dot{U}_i) \quad (23)$$

$$(Q \cdot e + R \cdot \varepsilon)_{,i} + X'_i = (\rho_{12} \cdot \ddot{u}_i + \rho_{22} \cdot \ddot{U}_i) - b \cdot (\dot{u}_i - \dot{U}_i) \quad (24)$$

Usando la notación vectorial se obtiene:

$$G \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \left[ \left( \lambda + G + \frac{Q^2}{R} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} + Q \nabla \cdot \mathbf{U} \right] + \mathbf{X} = (\rho_{11} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \rho_{12} \cdot \ddot{\mathbf{U}}) + b \cdot (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}) \quad (25)$$

$$\nabla (Q \nabla \cdot \mathbf{u} + R \nabla \cdot \mathbf{U}) + \mathbf{X}' = (\rho_{12} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \rho_{22} \cdot \ddot{\mathbf{U}}) - b \cdot (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}) \quad (26)$$

Si se asume un desplazamiento armónico del tipo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t}$  se obtienen las ecuaciones en el dominio de la frecuencia (notación vectorial):

$$G \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + G) \nabla e + \left[ \frac{Q}{R} - \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} \right] \nabla \tau + \left[ \frac{\hat{\rho}_{11} \hat{\rho}_{22} - \hat{\rho}_{12}^2}{\hat{\rho}_{22}} \right] \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{X} - \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} \mathbf{X}' = \mathbf{0} \quad (27)$$

$$\nabla^2 \tau + \omega^2 \frac{\hat{\rho}_{22}}{R} \tau + \omega^2 \cdot \left[ \hat{\rho}_{12} - \frac{Q}{R} \hat{\rho}_{22} \right] e + \nabla \cdot \mathbf{X}' = 0 \quad (28)$$

donde:

$$\hat{\rho}_{11} = \rho_{11} - i \frac{b}{\omega}; \hat{\rho}_{22} = \rho_{22} - i \frac{b}{\omega}; \hat{\rho}_{12} = \rho_{12} + i \frac{b}{\omega}; \quad (29)$$

#### 2.4.4 Significado físico de las constantes poroelásticas

En apartados anteriores han aparecido una serie de constantes que caracterizan el comportamiento dinámico del sólido poroelástico según la teoría clásica de Biot. Ahora se expondrá la interpretación física de estas constantes y, además, su relación con las propiedades mecánicas de los materiales que constituyen ambas fases. Para un estudio más extenso se puede consultar Biot (Biot y otros, 1957), Fatt (1959), Rice (Rice y otros, 1976), Yew (Yew y otros, 1978) y Berryman (1980).

De la ley de comportamiento obtenida según (21) y (22), aparecen  $\lambda$ ,  $G$ ,  $Q$  y  $R$ . Es posible, también, obtener una ley de comportamiento como (ver Aznárez, 2002):

$$\sigma_{ij} = 2G \cdot \varepsilon_{ij} + (\lambda + \alpha^2 \cdot M) \cdot e \cdot \delta_{ij} - \alpha \cdot M \cdot \zeta \cdot \delta_{ij} \quad (30)$$

$$p = M \zeta - \alpha M e \quad (31)$$

donde aparecen  $\lambda$ ,  $G$ ,  $\alpha$  y  $M$ .

De ellas,  $\lambda$  y  $G$  son constantes elásticas del esqueleto sólido drenado y su significado es el habitual en la Teoría de la Elasticidad. Las constantes  $\alpha$  y  $M$  son:

$$\alpha = \left( \frac{\zeta}{e} \right)_{p=0} \quad (32)$$

$$\frac{1}{M} = \left( \frac{\zeta}{p} \right)_{e=0} \quad (33)$$

Así,  $\alpha$  indica la cantidad de fluido extraído del medio por un cambio unitario en el volumen del sólido sin cambio en la presión de poro y  $1/M$  la cantidad de fluido que, inyectada en el espacio intersticial del esqueleto, provoca una variación unitaria de la presión de poro manteniendo constante el volumen del medio. Además, la constante  $R$ , relacionada con  $M$ , es una medida de la tensión equivalente sobre el fluido necesaria para forzar la inyección de fluido dentro mientras el volumen se mantiene constante.

$$R = \left( -\frac{\phi \tau}{\zeta} \right)_{e=0} \quad (34)$$

Por otro lado, la constante  $Q$  se refiere a una medida del acoplamiento entre dilataciones de las fases sólida y fluida del medio a presión de poro constante:

$$Q = \left( R \frac{\tau}{\epsilon} \right)_{p=0} \quad (35)$$

Mediante ensayos triaxiales es posible obtener algunos de estos parámetros. Así, sobre probetas drenadas y no drenadas se pueden obtener directamente los módulos de compresibilidad drenado y no drenado ( $K_d$ ,  $K_u$ ) y el coeficiente de Skempton  $B$  (Domínguez, 1995). Mediante ensayo de

cortadura simple se puede obtener  $G$ ,  $\lambda$  se puede obtener, por ejemplo de  $\lambda = \frac{2 \cdot G \cdot \nu}{1 - 2 \cdot \nu}$  y la constante que falta es:

$$M = \frac{K_u - K_d}{\alpha^2} \quad (36)$$

Por último, las constantes de Biot  $Q$  y  $R$  se pueden obtener de:

$$\begin{aligned} Q &= M \phi (\alpha - \phi) \\ R &= M \phi^2 \end{aligned} \quad (37)$$

Es posible relacionar estos coeficientes con las propiedades del medio poroelástico. Así,  $K_s$  y  $K_f$  representan los módulos de compresibilidad del sólido y fluido, respectivamente, y se pueden relacionar con  $M$  y  $\alpha$  como:

$$\alpha = 1 - \frac{K_d}{K_s} \quad (38)$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{K_s} - \frac{K_d}{K_s^2} + \phi \left( \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_s} \right) = \frac{\alpha - \phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f} \quad (39)$$

Por tanto:

$$R = \frac{\phi^2}{\frac{1}{K_s} - \frac{K_d}{K_s^2} + \phi \left( \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_s} \right)} \quad (40)$$

$$Q = \frac{\phi \left( 1 - \phi \frac{K_d}{K_s} \right)}{\frac{1}{K_s} - \frac{K_d}{K_s^2} + \phi \left( \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_s} \right)} \quad (41)$$

Se ve que las constantes de Biot  $M$  y  $\alpha$  o  $R$  y  $Q$  dependen de la compresibilidad relativa de ambas fases y de la porosidad. Lo habitual es que  $K_s \gg K_d$ , por tanto, las expresiones se simplifican como:

$$R = \phi K_f \quad (42)$$

$$Q = (1 - \phi) K_f \quad (43)$$

Por último, respecto de las densidades  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$  y  $\rho_{12}$  que aparecen en las ecuaciones de equilibrio dinámico. Supóngase que las partículas del sólido y fluido se desplazan con igual valor  $\mathbf{u} = \mathbf{U}$ . Despreciando las fuerzas de volumen, las ecuaciones de equilibrio serían:

$$\sigma_{ij,j} = (\rho_1 + \rho_2) \ddot{u}_i = \rho_h \ddot{u}_i \quad (44)$$

$$\tau_{ij,j} = (\rho_{11} + \rho_{12}) \ddot{u}_i = \rho_1 \ddot{u}_i \quad (45)$$

$$\tau_{,i} = (\rho_{12} + \rho_{22}) \ddot{u}_i = \rho_2 \ddot{u}_i \quad (46)$$

siendo  $\rho_h$  la densidad del medio homogéneo. Se puede comprobar que:

$$\rho_h = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22} \quad (47)$$

donde  $\rho_{12} = -\rho_a$  es el término de acoplamiento inercial entre ambas fases.

Considérese ahora que solo exista desplazamiento en la fase fluida, por tanto  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Despreciando las fuerzas de volumen y considerando además un fluido no viscoso, las ecuaciones de equilibrio serían:

$$\tau_{ij,j} = \rho_{12} \ddot{U}_i = -\rho_a \ddot{U}_i \quad (48)$$

$$\tau_{,i} = \rho_{22} \ddot{U}_i = (\rho_2 + \rho_a) \ddot{U}_i \quad (49)$$

En (49) se observa una inercia adicional  $\rho_a$ , por tanto, el desplazamiento del fluido a través del esqueleto no es uniforme. Así, si las partículas del esqueleto han de permanecer con

desplazamiento nulo, deben aparecer tensiones en la matriz sólida con resultante de signo contrario a la aceleración del fluido.

De todo lo anterior, se ve que la densidad añadida dependerá de los intersticios del esqueleto y es un parámetro que se determinará experimentalmente (Berryman, 1980). Aunque hay estudios que demuestran que este parámetro depende de la frecuencia, en este TFM se considerará constante [(Biot, 1956) o (Bonnet y otros, 1985)].

## 2.5 Propagación de ondas en medios elásticos y poroelásticos

### 2.5.1 Propagación de ondas en medios elásticos

Ahora se procede a analizar la propagación de ondas en un medio elástico, isótropo y homogéneo. Se parte, pues, de las ecuaciones de Navier, las cuales están acopladas. Stockes ideó un procedimiento para desacoplarlas basado en una formulación en términos de la dilatación volumétrica  $e$  y el vector de rotación  $\omega$  :

$$e = \epsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (50)$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (51)$$

El laplaciano del campo de desplazamientos puede ser escrito como:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla e - \nabla \times \omega \quad (52)$$

Introduciendo esta ecuación en la ecuación de Navier y operando se llega a:

$$\nabla^2 e = \frac{1}{c_p^2} \ddot{e} \quad (53)$$

$$\nabla^2 \omega = \frac{1}{c_s^2} \ddot{\omega} \quad (54)$$

donde:

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}; c_s^2 = \frac{G}{\rho} \quad (55)$$

Las ecuaciones (53) y (54) son una forma desacoplada de la ecuación de Navier pero en este caso están en términos de la dilatación volumétrica y del vector rotación. La componente llamada dilatacional se propaga a velocidad  $c_p$  mientras que la componente equivoluminal se propaga a velocidad  $c_s$ . Se cumple que  $c_p > c_s$  razón por la cual a  $c_p$  se les llama primaria y a  $c_s$  secundaria.

Utilizando  $c_p$  y  $c_s$  es posible escribir la ecuación de gobierno como:

$$-c_s^2 \nabla \times \omega + c_p^2 \nabla e = \ddot{\mathbf{u}} \quad (56)$$

Si se sustituye en esta expresión el campo de desplazamientos correspondiente a un problema de propagación plana armónica con velocidad de propagación  $c$  y dirección determinada por el vector unitario  $\mathbf{s}$ , que en notación compleja y para una amplitud unitaria, viene dado por (Domínguez, 1993):

$$\mathbf{u} = e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (57)$$

donde  $k$  es el número de onda  $\left(\frac{\omega}{c}\right)$ ,  $\omega$  la frecuencia angular,  $\mathbf{x}$  el vector de posición de cualquier punto y  $\mathbf{d}$  un vector unitario en la dirección del movimiento. Operando se obtiene:

$$(c_s^2 - c^2) \mathbf{d} + (c_p^2 - c_s^2) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} = 0 \quad (58)$$

De las ecuaciones (57) y (58) se observa que si  $c = c_p$ , solo se cumple (58) si  $\mathbf{s} = \pm \mathbf{d}$ , es decir, dirección de propagación y desplazamiento coinciden.

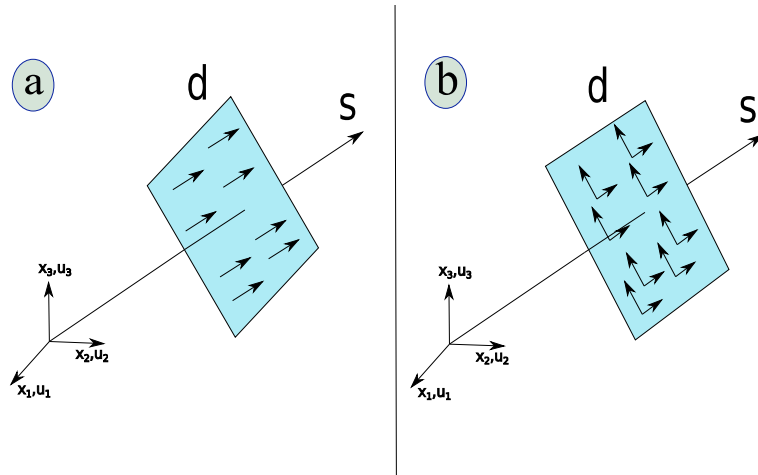


Figura 5: Desplazamiento y dirección de propagación en onda P (a) y onda S (b)

Análogamente, si  $c = c_s$ , solo se cumple (58) si  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{d} = 0$ , es decir, dirección de propagación y desplazamiento son perpendiculares.

Estas conclusiones son generalizables para cualquier tipo de perturbación. Aquí solo se han tratado algunos aspectos básicos que ayudarán a entender la propagación en otros medios. Un tratamiento en profundidad de la Teoría de la Elastodinámica puede estudiarse en Achenbach (1973) o Eringen (Eringen y otros, 1975).

### 2.5.2 Propagación de ondas en medios poroelásticos

Al igual que en medios elásticos, en los medios poroelásticos hay propagación de ondas.



Sin embargo, la diferencia está en que en poroelásticos habrán dos tipos de onda P y una de onda S. En las siguientes líneas se justificará matemáticamente esta afirmación.

El procedimiento se inicia igual que en medios elásticos, es decir, haciendo uso de la dilatación volumétrica y del vector de rotación para ambas fases:

$$e = \nabla \cdot \mathbf{u}; \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (59)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}; \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{U} \quad (60)$$

Introduciendo estos en (25) y (26), eliminando las fuerzas de volumen y teniendo en cuenta (52) se obtiene:

$$-G \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left[ \left( \lambda + 2G + \frac{Q^2}{R} \right) e + Q\varepsilon \right] = \rho_{11} \ddot{\mathbf{u}} + \rho_{12} \ddot{\mathbf{U}} + b(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}) \quad (61)$$

$$\nabla(Qe + R\varepsilon) = \rho_{12} \ddot{\mathbf{u}} + \rho_{22} \ddot{\mathbf{U}} - b(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}) \quad (62)$$

Luego, aplicando el operador divergencia a estas se obtienen las ecuaciones que gobiernan la propagación irrotacional. Así, se obtiene:

$$\nabla^2 \left[ \left( \lambda + 2G + \frac{Q^2}{R} \right) e + Q\varepsilon \right] = \rho_{11} \ddot{e} + \rho_{12} \ddot{\varepsilon} + b(\dot{e} - \dot{\varepsilon}) \quad (63)$$

$$\nabla^2(Qe + R\varepsilon) = \rho_{12} \ddot{e} + \rho_{22} \ddot{\varepsilon} - b(\dot{e} - \dot{\varepsilon}) \quad (64)$$

En este caso están implicadas dos ondas longitudinales con diferente velocidad de propagación en las que fluido y matriz sólida se mueven de forma acoplada.

Para obtener las ecuaciones que gobiernan la propagación rotacional se debe aplicar el operador rotacional sobre (61) y (62). Así, se obtiene:

$$G \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \rho_{11} \ddot{\boldsymbol{\omega}} + \rho_{12} \ddot{\boldsymbol{\Omega}} + b(\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\Omega}}) \quad (65)$$

$$0 = \rho_{12} \ddot{\boldsymbol{\omega}} + \rho_{22} \ddot{\boldsymbol{\Omega}} - b(\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\Omega}}) \quad (66)$$

Primero se analizarán las ondas de corte (rotacionales). Así, una onda armónica que se propaga a igual velocidad en ambas fases en el sentido positivo  $z$  dadas por:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\omega}} e^{i(\omega t - k_s z)} \quad (67)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\Omega}} e^{i(\omega t - k_s z)} \quad (68)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $k_s$  el número de onda,  $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\omega}}$  y  $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Omega}}$  las amplitudes de las ondas de rotación en la fase sólida y líquida respectivamente. Sustituyendo (67) y (68) en (66) y operando se llega a:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Lambda \boldsymbol{\omega} \quad (69)$$

donde:

$$\Lambda = \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \quad (70)$$

Se observa que el valor de  $\Lambda$  depende de la constante de disipación  $b$ , la frecuencia angular  $\omega$  y las densidades de los medios. Si  $b \neq 0$  el valor de  $\Lambda$  es complejo por lo que habrá un desfase entre los vectores de rotación.

Si se sustituye (67), (68) y (69) en (65) se obtiene el número de onda:

$$k_s^2 = \frac{\rho \omega^2}{G} \quad (71)$$

donde:

$$\rho = \frac{\omega^2 (\rho_{12}^2 - \rho_{11} \rho_{22}) + i\omega b (\rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22})}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \quad (72)$$

Así se llega a la conclusión que en un medio poroelástico se propaga una onda rotacional del mismo tipo que las ondas de corte vistas en medios elásticos. La velocidad de propagación será:

$$c_s^2 = \frac{\omega^2}{k_s^2} \quad (73)$$

Pero en este caso hay una diferencia respecto del caso elástico: la velocidad depende de la frecuencia y tiene carácter complejo en el caso de que la fase fluida tenga viscosidad no nula. Si se supone un número de onda del tipo:

$$k_s = k_s^r + ik_s^i \quad (74)$$

Se ve en (71) que solo tiene sentido valores positivos o nulos de  $k_s^r$ . Si se sustituye (74) en (67) se obtiene:

$$\omega = D_\omega e^{-k_s^i z} e^{i(\omega t - k_s^r z)} \quad (75)$$

El primer término exponencial amortigua la amplitud en sentido creciente de  $z$ . El segundo término representa un armónico e indica que la onda se propaga en dirección positiva en  $z$ .

Es posible sacar alguna conclusión más de las ecuaciones anteriores. Si la constante de disipación  $b=0$ , se obtiene de (69) y (73) respectivamente:

$$\Omega = \frac{-\rho_{12}}{\rho_{22}} \omega \quad (76)$$

$$c_s^2 = \frac{G}{\rho_{11} \left(1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11}\rho_{22}}\right)} \quad (77)$$

Para este caso el fluido y el sólido rotan en fase y la onda se propaga con velocidad constante sin amortiguamiento dado que en  $c$  no hay parte imaginaria. Además, en el caso de que el término densidad añadida  $\rho_{12} = 0$  el movimiento del fluido es irrotacional por lo que la onda S se propaga como si se propagara en un medio viscoelástico. Pero la velocidad estará corregida según la densidad del esqueleto sólido:

$$c_s^2 = \frac{G}{(1-\phi)\rho_s} \quad (78)$$

Por otro lado, si  $b \rightarrow \infty$ ,  $\Omega = \omega$  y la velocidad será  $c_s^2 = \frac{G}{(1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f}$ .

Para el estudio de la componente irrotacional se ensaya un desplazamiento armónico para cada fase del tipo:

$$u_3 = \mathbf{D}_u e^{i(\omega t - k_p z)} \quad (\text{fase sólida}) \quad (79)$$

$$U_3 = \mathbf{D}_U e^{i(\omega t - k_p z)} \quad (\text{fase líquida}) \quad (80)$$

donde  $k_p$  es el número de onda para propagación irrotacional,  $\mathbf{D}_u$  y  $\mathbf{D}_U$  las amplitudes de la onda de propagación de fase sólida y líquida respectivamente. Si se sustituye (79) y (80) en (63) y (64) se obtiene la ecuación característica:

$$A(k_p^2)^2 - B k_p^2 + C = 0 \quad (81)$$

donde:

$$A = \lambda + 2G \quad (82)$$

$$B = \rho \omega^2 + \frac{(\omega^2 \rho_{22} - i \omega b)}{R} (\lambda + 2G) - \left[ \frac{Q}{R} (\omega^2 \rho_{22} - i \omega b) - (\omega^2 \rho_{12} + i \omega b) \right] \left[ \frac{Q}{R} - \frac{\omega^2 \rho_{12} + i \omega b}{\omega^2 \rho_{22} - i \omega b} \right] \quad (83)$$

$$C = \frac{\rho \omega^2 (\omega^2 \rho_{22} - i \omega b)}{R} \quad (84)$$

Los eigenvectores que se obtienen son los siguientes:

$$k_{p1}^2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; k_{p2}^2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (85)$$

Dado que hay dos soluciones habrán dos ondas tipo P cuyas velocidades serán:

$$c_{p1}^2 = \frac{\omega^2}{k_{p1}^2}; c_{p2}^2 = \frac{\omega^2}{k_{p2}^2}; \quad (86)$$

A la onda de mayor valor se le llama onda P rápida, larga o de primer tipo. La más lenta se le llama onda P lenta, corta o de segundo tipo. Evidentemente, ambas ondas dependen de la frecuencia y se amortiguan en el sentido creciente de  $z$  pero este es más acusado en las ondas de segundo tipo. Por este motivo, solo es posible detectarlas cerca de la perturbación. Además, si la constante de disipación es nula, la atenuación también lo será y las ondas se propagarán indefinidamente.

Por último, del cálculo de eigenvectores se llega a que en el caso de las ondas  $P_1$  hay propagación en fase (esqueleto sólido y fluido) mientras que en el caso de  $P_2$  están desfasadas  $180^\circ$ .

## 2.6 Formulación integral y solución fundamental armónica

### 2.6.1 Formulación integral armónica

Se continúa con el análisis exponiendo ahora la formulación integral en el contorno. Se trata de unas ecuaciones obtenidas a partir de las ecuaciones de gobierno que relacionan las variables fundamentales en el interior del dominio  $\Omega$  con el contorno  $\Gamma$ . En tales ecuaciones se relacionan las variables del problema a resolver con otras correspondientes a un estado virtual cuya solución es conocida y la cual tiene pocas restricciones llamada solución fundamental. Con este conjunto de ecuaciones se podrá obtener la solución al problema planteado aplicando el MEC.

#### 2.6.1.1 Formulación integral en elastodinámica armónica

En ausencia de fuerzas de volumen, la forma integral del campo de desplazamientos de un estado elastodinámico de un dominio  $\Omega$  con contorno  $\Gamma$  es:

$$u_j^k + \int_{\Gamma} t_{ji}^* u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ji}^* t_i d\Gamma \quad (87)$$

donde  $u_j^k$  es el desplazamiento en dirección  $j$  del punto  $k$  donde se aplica la fuerza excitadora,  $u_i$  y  $t_i$  son los desplazamientos y las tensiones en dirección  $i$  del problema que se pretende resolver,  $u_{ji}^*$  y  $t_{ji}^*$  son los desplazamientos y las tensiones en dirección  $i$  de la solución fundamental cuando se aplica una carga puntual en dirección  $j$ , esto es, la solución de desplazamientos y tensiones que satisface la ecuación de gobierno (ecuación de Navier) en el dominio de la frecuencia  $G \cdot \nabla^2 u_{ji}^* + (\lambda + G) \cdot \nabla e_{j,i}^* - \omega^2 \cdot \rho \cdot u_{ji}^* + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \delta_{ij} = 0$  donde se ha

introducido la función delta de Dirac para darle un carácter puntual a la función excitadora.

### 2.6.1.2 Formulación integral en poroelasticidad armónica

En el caso poroelástico la formulación integral es:

$$u_j^k + \int_{\Gamma} t_{ji}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{nj}^* \tau d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ji}^* t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \tau_j^* U_n d\Gamma \quad (88)$$

$$-J \tau^k + \int_{\Gamma} t_{oi}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (U_{no}^* - J X_i'' n_i) \tau d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{oi}^* t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \tau_o^* U_n d\Gamma \quad (89)$$

donde:

$$J = \frac{1}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \quad (90)$$

Las tres ecuaciones (88) relacionan el desplazamiento en cada una de las tres direcciones ( $j=1,2,3$ ) de un punto interno  $k$  del dominio  $\Omega$  con el valor que adquieren los desplazamientos  $u_i$ ,  $U_n$  y las tensiones  $t_i$  y  $\tau$  en cada una de las fases del medio poroso en todo el contorno  $\Gamma$ , siendo  $U_n$  el desplazamiento de la fase fluida normal al contorno. Los términos  $u_{ji}^*$  y  $t_{ji}^*$  constituyen los desplazamientos y tracciones de la matriz sólida en dirección  $i$  debidos a la carga puntual aplicada según  $j$  actuando en la matriz sólida. Por otra parte, para la misma carga,  $\tau_j^*$  y  $U_{nj}^*$  representan la tensión equivalente y desplazamiento absoluto normal al contorno de la fase fluida. Estos términos, de valor conocido, corresponden a la solución fundamental cuando la carga está aplicada en un punto de la matriz sólida como ya se ha indicado. La ecuación (89) corresponde a la representación integral de la tensión equivalente en un punto interno  $k$  del dominio  $\Omega$  en la fase fluida del medio. En dicha ecuación se relaciona esta variable con el valor que adquieren los desplazamientos  $u_i$  y  $U_n$ , y las tensiones  $t_i$  y  $\tau$  en cada una de las fases del medio poroso en todo el contorno  $\Gamma$ . En este caso, los términos  $u_{oi}^*$  y  $t_{oi}^*$  son la componente  $i$  de los desplazamientos y tracciones en el esqueleto sólido provocados por la fuente puntual colocada en un punto del fluido (el subíndice “o” que se corresponde con  $j=4$  indica que la carga está aplicada en la fase fluida). De otro lado,  $\tau_o^*$  y  $U_{no}^*$  son la respuesta en tensión equivalente y desplazamiento normal del propio fluido a la misma solicitación. Al igual que antes, estos cuatro términos corresponden a la solución fundamental en el caso en que la carga esté aplicada en la fase fluida del medio.

## 2.6.2 Solución fundamental armónica

En las formulaciones anteriores se observaron una serie de términos que hacen referencia a la llamada solución fundamental. Básicamente, se trata de una solución que tienen pocas restricciones. En definitiva, es un artificio matemático que aplicando las ecuaciones integrales sobre el contorno vistas anteriormente, permite, mediante la aplicación del MEC, resolver el problema planteado. Dada su importancia, se expondrán las soluciones fundamentales de los tres medios expuestos.

### 2.6.2.1 Solución fundamental elastodinámica

La solución general correspondiente al problema de cargas concentradas armónicas en un punto de un medio elástico ocupando un espacio fue obtenida por Stokes (1849). La solución fundamental explícita para el estado dinámico de la transformada de Laplace fue presentada para problemas en dos y tres dimensiones por Cruse (Cruse y otros, 1968). Estos autores siguieron la solución general para la ecuación de campo transformada establecida por Doyle (1966) utilizando la representación de Iacovache. Para un punto  $\mathbf{x}$  que dista una distancia  $r$  del punto de aplicación  $\xi$ , el desplazamiento en dirección  $k$  para una carga aplicada en dirección  $l$  viene dado por:

$$u_{lk}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi G} (\Psi \delta_{lk} - \chi r_{,l} r_{,k}) \quad (91)$$

$$\Psi = \sum_{m=1}^2 \left[ 1 - \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 \delta_{ml} \right] \left[ \frac{1}{z_m^2 r^2} - \frac{1}{z_m r} + \delta_{m2} \right] E_m \quad (92)$$

$$\chi = \sum_{m=1}^2 \left[ 1 - \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 \delta_{ml} \right] \left[ \frac{3}{z_m^2 r^2} - \frac{3}{z_m r} + 1 \right] E_m \quad (93)$$

donde:

$$E_m = \frac{1}{r} e^{-i k_m r}; r = |\mathbf{x} - \xi|; z_1 = -i k_1; z_2 = -i k_2 \quad (94)$$

Con la solución en desplazamientos (92) y (93) y la ley de comportamiento del material, es posible obtener las tensiones para una superficie de normal  $\mathbf{n}$ :

$$t_{lk}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (A \delta_{lk} + B r_{,l} r_{,k}) + (A r_{,k} n_l + C r_{,l} n_k) \right] \quad (95)$$

donde:

$$A = \frac{d\Psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \quad (96)$$

$$B = 2 \left( 2 \frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr} \right) \quad (97)$$

$$C = \frac{\lambda}{\mu} \left( \frac{d\Psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - 2 \frac{\chi}{r} \right) - 2 \frac{\chi}{r} \quad (98)$$

### 2.6.2.2 Solución fundamental poroelástica armónica

En el caso de medios poroelásticos, la carga puede estar aplicada en la fase sólida o en la fluida. Según la respuesta que se considere se obtendrá una formulación distinta. A continuación se muestra esta. Un estudio pormenorizado para su obtención puede verse en Domínguez (1993) o Aznárez (2002).

Estando la carga aplicada en dirección  $l$  en la fase sólida se obtiene esta respuesta en desplazamiento de la matriz sólida en dirección  $k$  :

$$u_{lk}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi G} (\tilde{\Psi} \delta_{lk} - \tilde{\chi} r_{,l} r_{,k}) \quad (99)$$

Con la misma carga se obtiene esta respuesta en tensión equivalente en la fase fluida:

$$\tau_l^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{i\omega\eta}{4\pi} [\tilde{\Phi} r_{,l}] \quad (100)$$

Si lo que hay es una fuente puntual en la fase fluida se obtiene esta respuesta en desplazamientos del sólido en la dirección  $k$  :

$$u_{ok}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi} \tilde{\Phi} r_{,k} \quad (101)$$

Con la misma fuente puntual se obtiene esta respuesta en tensión equivalente en la fase fluida:

$$\tau_o^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi} [\tilde{\kappa}] \quad (102)$$

siendo:

$$\tilde{\Psi} = \sum_{m=1}^3 \left[ (-1)^m \frac{G}{(\lambda + 2G) z_{21}} \left( i \frac{\omega}{K} - z_m^2 \right) (\delta_{m1} + \delta_{m2}) + \delta_{m3} \right] \left[ \frac{1}{z_m^2 r^2} - \frac{1}{z_m r} + \delta_{m3} \right] E_m \quad (103)$$

$$\tilde{\chi} = \sum_{m=1}^3 \left[ (-1)^m \frac{G}{(\lambda + 2G) z_{21}} (i \frac{\omega}{K} - z_m^2) (\delta_{m1} + \delta_{m2}) + \delta_{m3} \right] \left[ \frac{3}{z_m^2 r^2} - \frac{3}{z_m r} + 1 \right] E_m \quad (104)$$

$$\tilde{\phi} = \sum_{m=1}^2 \left[ \frac{(-1)^{m+1}}{(\lambda + 2G) z_{21}} z_m \right] \left[ \frac{1}{z_m r} - 1 \right] E_m \quad (105)$$

$$\tilde{\kappa} = \sum_{m=1}^2 \frac{(-1)^{m+1}}{z_{21}} \left[ \frac{G}{\lambda + 2G} z_3^2 - z_m^2 \right] E_m \quad (106)$$

Esta formulación representa la solución fundamental poroelástica en términos de las variables fundamentales: los desplazamientos de la fase sólida y tensión equivalente en la fase fluida.

Además, se añade la solución fundamental poroelástica en términos de las variables derivadas vector tensión de la fase sólida y desplazamiento normal en la fase fluida asociados a una superficie con vector normal exterior  $\mathbf{n}$ .

Estando la carga aplicada en dirección  $l$  en la fase sólida se obtiene esta respuesta en tensión de la matriz sólida en dirección  $k$ :

$$t_{lk}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (\tilde{A} \delta_{lk} + \tilde{B} r_{,l} r_{,k}) + (\tilde{A} r_{,k} n_l + \tilde{C} r_{,l} n_k) \right] \quad (107)$$

Con una fuente puente en la fase fluida se obtiene este vector tensión en la fase sólida en dirección  $k$ :

$$t_{ok}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi} \left[ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \tilde{F} r_{,k} + \tilde{G} n_k \right] \quad (108)$$

Con una carga aplicada en dirección  $l$  en la fase sólida se obtiene esta respuesta en tensión de la fase fluida:

$$U_{nl}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \tilde{D} r_{,l} + \tilde{E} n_l \right] \quad (109)$$

Con una fuente en la fase fluida se obtiene esta respuesta en la fase fluida:

$$U_{no}^* - J X'_l n_l = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \tilde{H} \quad (110)$$

siendo:

$$\tilde{A} = \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} - \frac{\tilde{\chi}}{r} \quad (111)$$



$$\tilde{B} = 2 \left( 2 \frac{\tilde{\chi}}{r} - \frac{d \tilde{\chi}}{dr} \right) \quad (112)$$

$$\tilde{C} = \frac{\lambda}{G} \left( \frac{d \tilde{\Psi}}{dr} - \frac{d \tilde{\chi}}{dr} - 2 \frac{\chi}{r} \right) - 2 \frac{\tilde{\chi}}{r} + \frac{Q}{R} i \omega \eta \tilde{\phi} \quad (113)$$

$$\tilde{D} = i \omega \eta J \left( \frac{d \tilde{\phi}}{dr} - \frac{\tilde{\phi}}{r} \right) - \frac{Z}{G} \tilde{\chi} \quad (114)$$

$$\tilde{E} = i \omega \eta J \frac{\tilde{\phi}}{r} + \frac{Z}{G} \tilde{\psi} \quad (115)$$

$$\tilde{F} = 2 G \left( \frac{d \tilde{\phi}}{dr} - \frac{\tilde{\phi}}{r} \right) \quad (116)$$

$$\tilde{G} = \lambda \left( \frac{d \tilde{\phi}}{dr} + 2 \frac{\tilde{\phi}}{r} \right) - 2 \mu \frac{\tilde{\phi}}{r} + \frac{Q}{R \gamma} \tilde{K} \quad (117)$$

$$\tilde{H} = J \frac{d \tilde{K}}{dr} + Z \gamma \tilde{\phi} \quad (118)$$

$$E_m = \frac{1}{r} e^{z_m r}; r = |\mathbf{x} - \xi|; z_m = -i k_m (m=1,2,3); z_{21} = z_2^2 - z_1^2 \quad (119)$$

### 2.6.3 Formulación integral en el contorno

La resolución del problema planteado (según el medio a estudiar, elástico o poroelástico) requiere aplicar las ecuaciones (87, elástico), o (88 y 89, poroelástico). Dado que la técnica numérica empleada será el MEC solo será necesario discretizar los contornos. Con las ecuaciones integrales de contorno y conociendo las soluciones fundamentales es posible, aparentemente, obtener solución.

Sin embargo, directamente no es posible pues justo en los nodos aparecen singularidades que harían fracasar el procedimiento. Por tanto, deberán ser tratadas. El procedimiento para solventar este problema es subdividir el contorno  $\Gamma$  sobre el nodo en otros dos  $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$  y  $\Gamma_\varepsilon$ .

Para ver el procedimiento se utilizará la ecuación (70) y subdividiendo se obtiene:

$$u_l^i + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma \quad (120)$$

Ahora se procede a ver qué ocurre cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Las integrales que tienen los contornos  $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$  no encierran la singularidad. Así, será posible obtener su valor como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma = CPV \int_{\Gamma} t_{lk}^* u_k d\Gamma \quad (121)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma = CPV \int_{\Gamma} u_{lk}^* t_k d\Gamma \quad (122)$$

donde  $CPV$  es el Valor Principal de Cauchy (Doblaré y otros, 1998).

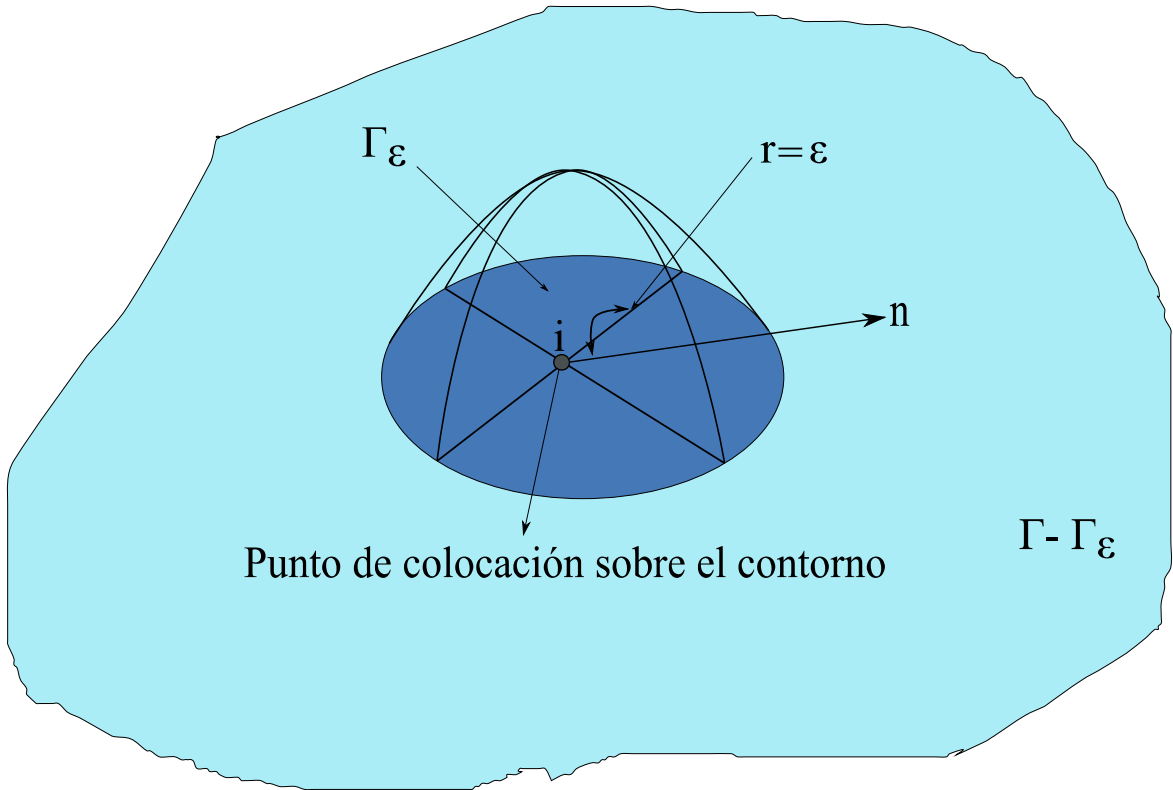


Figura 6: Descomposición del contorno  $\Gamma$  en otros dos ( $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ ) y  $\Gamma_\varepsilon$

Para los términos donde están las singularidades se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma = 0 \quad (123)$$

$$u_l^i + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma = c_{lk}^i u_k^i \quad (124)$$

donde  $c_{lk}^i$ , llamado término libre, es una constante que depende de la geometría del contorno en el punto de aplicación de la carga  $\xi$  y  $\nu$ . Por tanto, reordenando la ecuación integral después de aplicar límites a ambos lados de la expresión se obtiene:

$$c_{lk}^i u_k^i + \int_{\Gamma} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* t_k d\Gamma \quad (125)$$

que en forma matricial es:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma \quad (126)$$

donde  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  serán los vectores de las variables de campo,  $\mathbf{u}^*$  y  $\mathbf{p}^*$  los tensores de la solución fundamental y  $\mathbf{c}^i$  el tensor del término libre elastostático en el punto de colocación  $\mathbf{c}^i = I$  si se trata de puntos internos:

$$\mathbf{c}^i = \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & c_{13}^i \\ c_{21}^i & c_{22}^i & c_{23}^i \\ c_{31}^i & c_{32}^i & c_{33}^i \end{bmatrix} \quad (127)$$

Por último, en el caso de medios poroelásticos, operando de la misma manera y partiendo de las ecuaciones (88) y (89) se llega a una ecuación del tipo (126) siendo en este caso:

$$\mathbf{c}^i = \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & c_{13}^i & 0 \\ c_{21}^i & c_{22}^i & c_{23}^i & 0 \\ c_{31}^i & c_{32}^i & c_{33}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J c^i \end{bmatrix} \quad (128)$$

siendo  $\mathbf{c}^i$  un valor que depende de la geometría del contorno en  $\mathbf{x}_i$ , del módulo de Poisson del material drenado y del valor:

$$J = \frac{1}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \quad (129)$$

## **Capítulo 3**

### ***El Método de Elementos de Contorno (MEC)***

#### ***3.1 Introducción***

El Método de los Elementos de Contorno (MEC) es una técnica numérica que usa una formulación integral sobre los contornos de un dominio [Domínguez (1993)]. De esta manera permite obtener las incógnitas del problema a resolver.

Este método emplea dos formulaciones. La directa, la cual contiene como incógnitas básicas, cantidades con un claro significado físico, y en términos de las cuales se dan las condiciones de contorno conocidas, y la indirecta, que se caracteriza porque las incógnitas básicas no tienen un significado concreto, pero de ellas se pueden obtener las variables físicas.

En la formulación directa las incógnitas son las variables básicas de campo y sus derivadas, las cuales también poseerán un significado físico, pero referidas siempre a sus valores en el contorno. Al igual que en el MEF, se deberá discretizar, pero, en este caso, se procederá solo sobre el contorno. Se deberán utilizar funciones de aproximación siendo la solución final más precisa cuanto mayor sea el orden del polinomio empleado. Obviamente, esto tendrá un coste computacional y siempre será un compromiso entre precisión y velocidad de cálculo.

Dado que solo se discretizan los contornos, el sistema de ecuaciones a resolver es menor que en el MEF. Sin embargo, el sistema no es simétrico. Por otra parte, el MEC tiene dificultades para tratar propiedades no lineales. Así, si el problema a resolver es altamente no lineal, se tendrán problemas para tratar adecuadamente tales características.

Tanto el MEF como el MEC son técnicas numéricas muy poderosas y dependiendo del tamaño del dominio a discretizar se deberá escoger, preferente un método sobre el otro. La clara indicación del MEC es cuando el dominio a discretizar sea infinito o seminfinito. En otro caso distinto a este, el MEF presenta ventajas sobre el MEC.

Esta importante característica, unida al hecho de que la mayoría de los análisis dinámicos se limitan al comportamiento lineal, con lo cual no se presenta una de las debilidades de esta técnica, ha hecho del MEC la alternativa numérica más adecuada para el estudio de importantes campos de la ingeniería, tales como el problema de la interacción dinámica suelo-estructura, como en el caso de este TFM.

### 3.2 Discretización de contornos

Para aplicar las ecuaciones integrales primero se deben discretizar los contornos. Así, tales contornos se subdividirán en  $NE$  elementos, aproximando las variables a obtener mediante

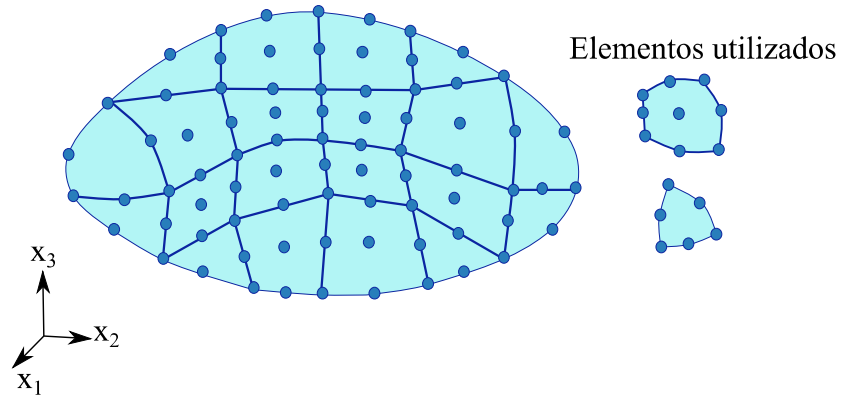


Figura 7: Contorno tridimensional general discretizado con elementos de segundo orden

funciones de interpolación.

Sobre un elemento genérico  $j$  se tiene:

$$u = \Phi u^j \quad (130)$$

$$p = \Phi p^j \quad (131)$$

donde  $u^j$  y  $p^j$  son vectores de  $\alpha NJ$  componentes y  $\Phi$  es una matriz de dimensión  $\alpha \times \alpha NJ$  que está formada por funciones de forma del elemento  $NJ$  en el nodo del elemento  $J$  siendo  $\alpha=3$  para viscoelásticos y  $\alpha=4$  para poroelásticos.

La geometría del elemento se aproximará como:

$$x = \Phi x^j \quad (132)$$

donde  $x^j$  contiene las  $3 NJ$  coordenadas de los nodos del elemento  $j$ . Para este TFM se han empleado elementos triangulares y cuadrangulares cuadráticos (polinomios de segundo orden).

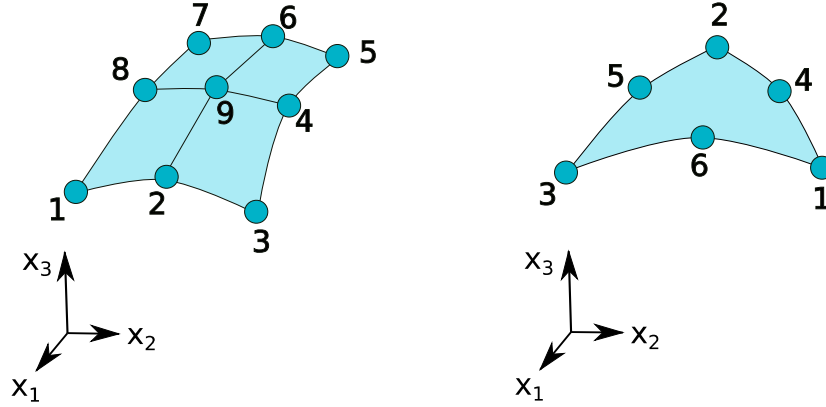


Figura 8: Elementos utilizados en el TFM (segundo orden)

La ecuación general obtenida después de discretizar los contornos es:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma \right] u^j = \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma} u^* \Phi d\Gamma \right] p^j \quad (133)$$

siendo  $\Gamma_j$  la superficie del contorno asociado al elemento  $j$ . Aplicando las cargas o fuentes sobre los nodos se obtiene una ecuación matricial del tipo:

$$H u = G t \quad (134)$$

donde  $u$  y  $t$  son los vectores que contienen los valores nodales del problema. Además,  $H$  y  $G$  son los llamados coeficientes integrales. Una vez aplicadas las condiciones de contorno se obtiene el sistema:

$$A X = F \quad (135)$$

donde  $X$  es el vector de incógnitas ( $u$  o  $p$ ) y  $F$  se obtiene de multiplicar  $H$  y  $G$  por las componentes conocidas de  $u$  y  $p$  respectivamente.

### 3.3 Evaluación de las integrales

De la ecuación (133) se observan estos términos cuya igualdad es:

$$G W^{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \quad (136)$$

$$H W^{ij} = \int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma \quad (137)$$

Cuando se colocan las cargas sobre los nodos pueden darse dos casos. Si el nodo de aplicación  $i$  no forma parte del elemento  $j$  las ecuaciones (136) y (137) se podrán evaluar numéricamente. Teóricamente, cualquier método de integración numérica es válido. Sin embargo, el método que suele emplearse es la integración gaussiana debido a la alta eficiencia computacional

que tiene.

Por otro lado, habrá que realizar una transformación del sistema de referencia. Los elementos tienen un sistema de referencia el cual es distinto al sistema de referencia que tiene el elemento que forma los contornos.

El operador matemático que permite tal transformación es el conocido jacobiano:

$$|J_A| = \sqrt{\left[ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \right]^2} \quad (138)$$

que introducido en las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$GW^{ij} = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} u^* \Phi |J_A| d\xi_1 d\xi_2 \quad (139)$$

$$HW^{ij} = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} p^* \Phi |J_A| d\xi_1 d\xi_2 \quad (140)$$

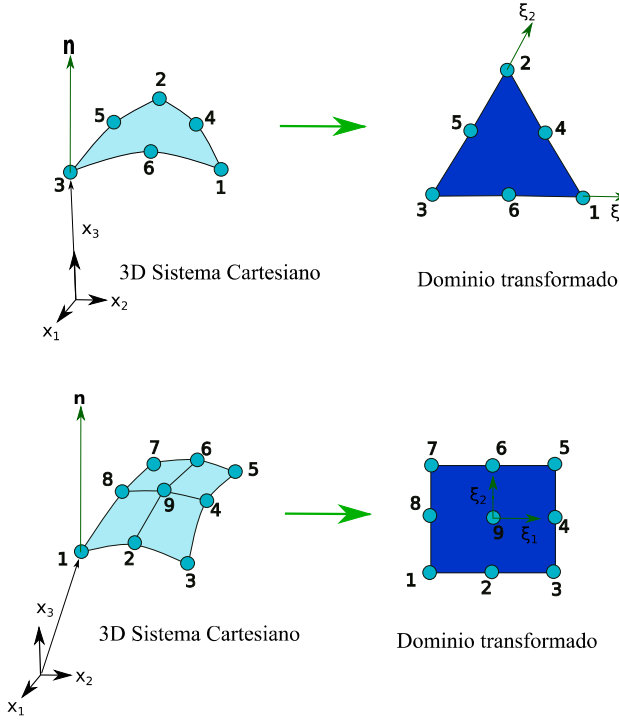


Figura 9: Transformación de coordenadas

Con la introducción del jacobiano, las ecuaciones (139) y (140) ya son evaluables. Dado que se ha optado por integración gaussiana los límites de integración serán -1 y 1 para elementos cuadrangulares y 0 y 1 para triangulares. Para el segundo caso, cuando el segundo punto de colocación  $i$  forma parte del elemento  $j$  sobre el que se va a integrar, tanto  $u^*$  como  $p^*$  presentan singularidades del tipo  $O(\frac{1}{r})$  o  $O(\frac{1}{r^2})$ . Así, no será posible integrar directamente. Dependiendo del orden de la singularidad, su tratamiento aumentará en complejidad.

### 3.3.1.1 Integración cuando la singularidad es del tipo $O(\frac{1}{r})$

La evaluación de este tipo de términos se consigue con un cambio del sistema de referencia. Así, la condición será que el jacobiano de transformación de un sistema a otro sea de orden  $O(r)$ . Existe bibliografía detallada sobre estos procedimientos como Lachat (Lachat y

otros, 1976), Telles (1987), y Cerrolaza (Cerrolaza y otros, 1989), por ejemplo. También, la aplicación detallada sobre elementos cuadriláteros puede verse en detalle en Maeso (1992) y sobre elementos triangulares en Domínguez (1993).

### 3.3.1.2 Integración cuando la singularidad es del tipo $O(\frac{1}{r^2})$

Existe una amplia bibliografía que trata este tema. No entra dentro de los objetivos de este TFM su desarrollo profundo. Se puede consultar, por ejemplo, Brebbia (Brebbia y otros, 1992), Li (Li y otros, 1985) o Giuggiani (Giuggiani y otros, 1987).

El código Multifefe lleva incorporado un método en el cual la singularidad es “ficticia” al desvanecerse a medida que se incorporan las contribuciones de los elementos adyacentes. La técnica es válida para elementos curvos de cualquier orden y tipo y se basa en la identificación concreta de los términos con singularidad fuerte, que serán regularizados directamente en coordenadas cartesianas de forma conveniente para obtener una integral de superficie y otra de línea extendida al perímetro del elemento, ambas no singulares y evaluables mediante cuadratura estándar. La aplicación del procedimiento citado puede verse en detalle en Chirino (Chirino y otros, 2000) y Aznárez (2002).

## 3.4 Condiciones de contorno y formulación en las interfases

Para poder resolver las ecuaciones diferenciales es necesario imponer una serie de condiciones de contorno. Dado que no hay dependencia temporal, no será necesario imponer condiciones iniciales. Así, se definirá el vector tensión para un sólido viscoelástico como:

$$t_i^s(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, \omega) n_j(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Gamma \quad (141)$$

donde  $\sigma_{ij}^s$  es el tensor de tensiones del sólido

Para el esqueleto sólido de una región poroelástica será:

$$t_i^s(\mathbf{x}, \omega) = \tau_{ij}^s(\mathbf{x}, \omega) n_j(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Gamma \quad (142)$$

donde  $\tau_{ij}^s$  es el tensor de tensiones equivalente del esqueleto sólido

Por último, si se trata de una región poroelástica será:

$$t_i^p(\mathbf{x}, \omega) = t_i^e(\mathbf{x}, \omega) + \tau_{ij}^s(\mathbf{x}, \omega) n_j(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Gamma \quad (143)$$



### 3.4.1 Condiciones exteriores

En general, habrá un contorno  $\Gamma_1$  donde serán conocidas las variables fundamentales y otro  $\Gamma_2$  donde serán dadas las variables derivadas.

Para sólidos viscoelásticos, en los que el desplazamiento es la variable fundamental y la tensión es la derivada:

$$u_i^s = \bar{u}_i^s; \text{ en } \Gamma_1 \quad (144)$$

$$t_i^s = \bar{t}_i^s; \text{ en } \Gamma_2 \quad (145)$$

donde  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  y  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

Para el caso de medios poroelásticos, las variables fundamentales serán el desplazamiento en el esqueleto sólido  $\mathbf{u}^e$  y la tensión equivalente en el fluido  $\tau$ . Las derivadas serán el tensor en el esqueleto sólido  $\mathbf{t}^e$  y el desplazamiento normal al contorno del fluido  $U_n$ .

Además, los contornos pueden ser permeables (permite el paso del fluido) o impermeables (no lo permite). En los primeros la presión de poro es cero ( $\tau=0$ ). Así, será posible obtener el desplazamiento de la fase sólida  $u_i^e = \bar{u}_i^e$  o la tensión equivalente sobre ella  $t_i^e = \bar{t}_i^e$ . Si fuera impermeable, las normales en ambas fases serían iguales  $u_n^e = U_n^e$ . Por tanto,  $u_n^e = U_n = \bar{u}_n$  y las incógnitas serían las tensiones equivalentes en ambas fases. O será conocida la tensión total sobre el contorno  $t_i^p = \bar{t}_i^p$  y el desplazamiento incógnita.

### 3.4.2 Condiciones en las interfaces

De lo visto hasta ahora se desprende que habrán distintas condiciones de interacción según los medios que actúen. Esa interacción deberá cumplir las ecuaciones de equilibrio de tensiones y compatibilidad de desplazamientos de ambos medios en todo el contorno.

Habrán tres posibilidades de interacción de los modelos vistos: viscoelástico-viscoelástico, viscoelástico-poroelástico y poroelástico-poroelástico.

Para sólidos viscoelástico ( $s_1$ ) - viscoelástico ( $s_2$ ) la ecuación de equilibrio será:

$$\mathbf{t}^{s_1} + \mathbf{t}^{s_2} = \mathbf{0} \quad (146)$$

Y la de compatibilidad:

$$\mathbf{u}^{s_1} = \mathbf{u}^{s_2} \quad (147)$$

Para sólidos viscoelástico ( $s$ ) - poroelástico ( $p$ ) la ecuación de equilibrio será:

$$\mathbf{t}^s + \mathbf{t}^e + \tau \mathbf{n}^p = \mathbf{0} \quad (148)$$

Y la de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^s &= \mathbf{u}^e \text{ y } \mathbf{u}^e \mathbf{n}^p = U_n^p \text{ Contorno impermeable} \\ \mathbf{u}^s &= \mathbf{u}^e \text{ Contorno permeable} \end{aligned} \quad (149)$$

Para poroelástico (  $p_1$  ) - poroelástico (  $p_2$  ) la ecuación de equilibrio será:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{p_1}}{\phi^{p_1}} &= \frac{\tau_2^p}{\phi^{p_2}} \\ \mathbf{t}^{p_1} + \tau^{p_1} \mathbf{n}^{p_1} + \mathbf{t}^{p_2} + \tau^{p_2} \mathbf{n}^{p_2} &= 0 \end{aligned} \quad (150)$$

Y la de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{e_1} &= \mathbf{u}^{e_2} \\ \phi^{p_1} [U_n^{p_1} - \mathbf{u}^{e_1} \mathbf{n}^{p_1}] + \phi^{p_2} [U_n^{p_2} - \mathbf{u}^{e_2} \mathbf{n}^{p_2}] &= 0 \end{aligned} \quad (151)$$

### 3.4.3 Estrategias a seguir en la colocación de nodos

Se han visto las ecuaciones que rigen los problemas planteados y no es difícil ver que la resolución de estos tipos de problemas presentan muchas dificultades. Las ecuaciones integrales a resolver pueden presentar singularidades que es necesario tratar. También, según los medios de interacción habrán unas condiciones de contorno distintas. Además, según la geometría del modelo quizás sea necesario aumentar el grado de los elementos que serán utilizados para discretizar para obtener así una buena convergencia.

Pues con todo lo visto hasta ahora, todavía falta una cuestión más a añadir, esto es, qué pasa cuando un nodo es compartido por dos o más elementos.

Cuando se presenta esto, habrán vectores normales asociados distintos lo que implica una falta de continuidad en las tensiones o flujos (derivadas de las variables primarias). Por otro, un nodo puede pertenecer a regiones de distinta naturaleza lo que conlleva a que presente distinto número de grados de libertad si se considera como perteneciente a una u otra región.

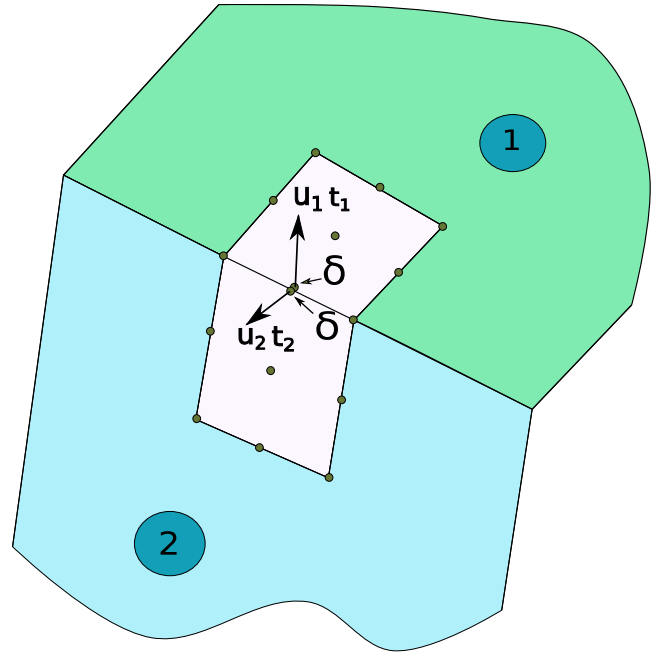


Figura 10: Duplicación de nodos en el borde

Una manera de resolver esto es duplicando nodos, es decir, que cada elemento o contorno tenga su “propio” nodo. Así, se podrán imponer las condiciones que se necesiten independientemente a cada nodo. Esta técnica se empezó a emplear, primero en 2D por Medina (1987) , y luego en 3D por Maeso (1992). Tiene el inconveniente de que aumenta el número de grados de libertad del sistema de ecuaciones a resolver. No obstante, es un precio más que razonable a pagar para evitar los inconvenientes que se podrían derivar si no se utilizara esta técnica.

Si se tiene una variable primaria  $\mathbf{u}$  y otra derivada  $\mathbf{t}$ , dado que se duplicará se tendrá  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  y  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  por lo que la ecuación integral discretizada en el nodo duplicado presentará la siguiente relación:

$$\begin{aligned} h_{11}\mathbf{u}_1 + h_{12}\mathbf{u}_2 - g_{11}\mathbf{t}_1 - g_{12}\mathbf{t}_2 + \dots &= \bar{\mathbf{f}} \\ h_{21}\mathbf{u}_1 + h_{22}\mathbf{u}_2 - g_{21}\mathbf{t}_1 - g_{22}\mathbf{t}_2 + \dots &= \bar{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (152)$$

donde en  $h_{11}$  y  $h_{22}$  se incluye el término libre y en  $\bar{\mathbf{f}}$  se recoge el producto de los valores impuestos  $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{t}})$  en todo el contorno y los coeficientes de integración correspondientes.

En general, este procedimiento resuelve muchos de los problemas que se pueden plantear. Sin embargo, cuando los desplazamientos son iguales  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}$  el sistema (153) es singular. La manera de resolver esto por los mismos autores ha sido desplazar ligeramente uno de los nodos. Así, el sistema ya no será singular. Este procedimiento se llama “colocación no nodal”. Además, con este procedimiento se pueden tratar discretizaciones no conformes.

La ecuación (125) queda modificada como sigue:

$$\mathbf{c}^i \Phi \mathbf{u}^k + \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right] \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right] \mathbf{p}^j \quad (153)$$

siendo  $\mathbf{u}^k$  el vector de desplazamientos nodales del elemento  $\Gamma_k$  y  $\Phi$  la matriz de funciones de forma particularizada para las coordenadas  $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$  del punto de colocación. El término libre siempre será  $c_{lk}^i = 0,5 \delta_{lk}$ . Para un análisis más profundo consultar Chirino (Chirino y otros, 2000) y Aznárez (2002).

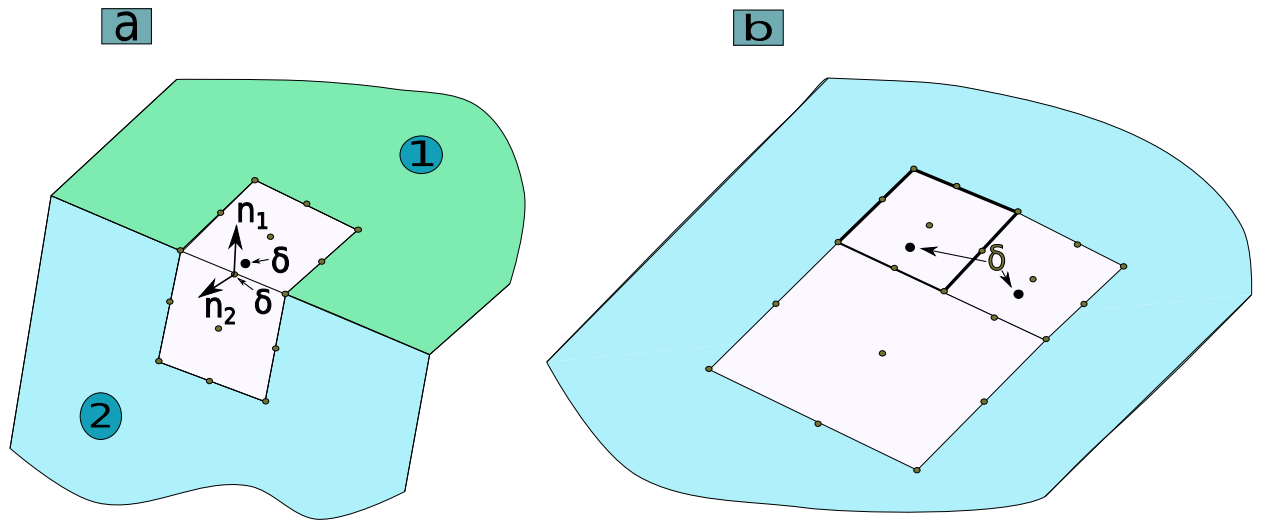


Figura 11: Colocación de nodos en esquina y en mallas no conformes

## **Capítulo 4**

### **Interacción suelo-estructura**

#### **4.1 Introducción**

En este capítulo se expondrán los fundamentos de la interacción suelo-estructura, explicando la formulación que se empleará para obtener las distintas impedancias que modelizarán dicha interacción. Para un análisis en mayor profundidad, consultar Gracia (2002).

Como ya se ha dicho, el objetivo de este TFM es obtener relaciones de interacción entre la zapata de un aerogenerador y el suelo. Esta relación se modelizará como un muelle y un amortiguamiento por cada desplazamiento y por cada giro. Obtenida esta relación es posible ver su comportamiento dinámico (respuesta) cuando es sometida a una carga de entrada (excitación).

#### **4.2 Matriz de impedancias**

En un modelo 3D habrán tres desplazamientos y tres giros. Así, los nombre serán impedancia vertical  $K_z$ , impedancias horizontales  $K_x$  y  $K_y$ , impedancia de torsión  $K_{\phi z}$  e impedancias de cabeceo  $K_{\phi x}$  y  $K_{\phi y}$ .

Para excitaciones armónicas con frecuencia  $\omega$ , la matriz de rigidez dinámica se define como la matriz que relaciona el vector de fuerzas (fuerzas y momentos) aplicados a la cimentación y el vector de desplazamientos (desplazamientos y giros) resultante, cuando la cimentación se asume que es sin masa.

Matemáticamente, la matriz de rigidez es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & K_{xy} & K_{xz} & K_{x\phi_1} & K_{x\phi_2} & K_{x\phi_3} \\ K_{yx} & K_y & K_{yz} & K_{y\phi_1} & K_{y\phi_2} & K_{y\phi_3} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_z & K_{z\phi_1} & K_{z\phi_2} & K_{z\phi_3} \\ K_{\phi_1 x} & K_{\phi_1 y} & K_{\phi_1 z} & K_{\phi_1} & K_{\phi_1 \phi_2} & K_{\phi_1 \phi_3} \\ K_{\phi_2 x} & K_{\phi_2 y} & K_{\phi_2 z} & K_{\phi_2 \phi_1} & K_{\phi_2} & K_{\phi_2 \phi_3} \\ K_{\phi_3 x} & K_{\phi_3 y} & K_{\phi_3 z} & K_{\phi_3 \phi_1} & K_{\phi_3 \phi_2} & K_{\phi_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (154)$$

Los términos  $K$  que aparecen en (154) son las impedancias del sistema representado. Si se asume un desplazamiento o giro unitario se observa que los valores de las fuerzas o momentos serán precisamente las impedancias. Este es el procedimiento que se seguirá para obtenerlas.

Las impedancias se componen de una parte real y otra imaginaria llamándose a la parte real rigidez y a la imaginaria amortiguamiento. Obviamente, sus valores dependerán de la frecuencia  $\omega$ .

$$K_{ij}(\omega) = \text{Re}(K_{ij}) + i \cdot \text{Im}(K_{ij}) \quad (155)$$

La parte real de la rigidez se relaciona a las propiedades de rigidez e inercia del suelo. La parte imaginaria muestra el amortiguamiento del sistema. El principal efecto del amortiguamiento es debido a la energía disipada por las ondas propagándose lejos de la cimentación (amortiguamiento por radiación). Es obvio que desde que esta clase de amortiguamiento se asocia a la radiación de onda, debe emplearse un modelo de semiespacio (elástico y lineal, u otro modelo) que permita representar este fenómeno. Además del amortiguamiento por radiación, generalmente también existirá un amortiguamiento debido al material (histerético).

El amortiguamiento por radiación es altamente dependiente de la frecuencia. Debido a esto, las componentes de la rigidez usualmente se escriben como:

$$K_{ij}(\omega) = K_{0ij} \cdot (k_{ij} + i \cdot a_0 \cdot c_{ij}) \quad (156)$$

donde  $K_{0ij}$  es el valor estático de la componente  $ij$  de la rigidez,  $k_{ij}$  y  $c_{ij}$  son los coeficientes

dependientes de la frecuencia,  $a_0 = \frac{\omega \cdot B}{c_s}$  es la frecuencia,  $B$  es la longitud característica (semiancho o diámetro) de la cimentación, y  $c_s$  es, normalmente, la velocidad de la onda transversal.

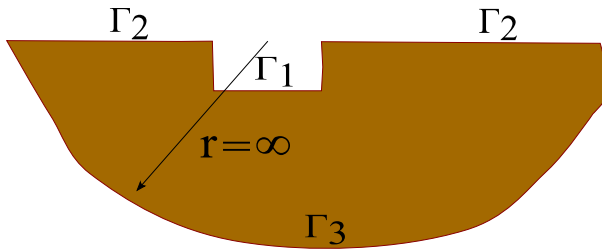
Cuando el amortiguamiento del material existe en un intento de aislar el efecto de estos tipos diferentes de amortiguamientos, se escribe la rigidez dinámica en la forma siguiente:

$$K_{ij}(\omega) = K_{0ij} \cdot (k_{ij} + i \cdot a_0 \cdot c_{ij}) \cdot (1 + 2i\xi) \quad (157)$$

donde  $\xi$  es la relación de amortiguamiento (histerético). Los coeficientes  $k_{ij}$  y  $c_{ij}$  todavía dependen de la rigidez del material; sin embargo, para sedimentos de suelo profundos y valores de  $\xi$  típicos, esta dependencia es pequeña.

Para llevar a cabo la discretización de la representación integral, una vez dividido el contorno en esa serie de elementos, se descomponen las integrales sobre el contorno en integrales sobre cada uno de dichos elementos, de forma que si existen  $NE$  elementos, la representación integral del MEC se puede expresar como:

$$c_{lk}^i \cdot u_k^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* \cdot p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* \cdot u_k d\Gamma \quad (158)$$



Ahora se procederá a aplicar la fórmula (158) sobre la figura 12. El contorno  $\Gamma_1$  es el de la interacción zapata-suelo. El contorno  $\Gamma_2$  es la superficie libre y el  $\Gamma_3$  es el semiespacio.

Para un punto  $i$  perteneciente a las superficies  $\Gamma_1$  o  $\Gamma_2$ , la representación integral en la forma dada será:

$$c_{lk}^i \cdot u_k^i = \left\{ \int_{\Gamma_1} u_{lk}^* \cdot p_k d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_{lk}^* \cdot u_k d\Gamma \right\} + \left\{ \int_{\Gamma_2} u_{lk}^* \cdot p_k d\Gamma - \int_{\Gamma_2} p_{lk}^* \cdot u_k d\Gamma \right\} + \left\{ \int_{\Gamma_3} u_{lk}^* \cdot p_k d\Gamma - \int_{\Gamma_3} p_{lk}^* \cdot u_k d\Gamma \right\} \quad (159)$$

A partir de las condiciones de regularidad y radiación, se puede demostrar que la integral sobre  $\Gamma_3$  se hace cero. Se puede ver en Kupradze (1963) o Eringer (Eringer y otros, 1975).

Por otro lado, si se discretizan las superficies  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  en elementos y nodos, y se aplica (159) en función de las variables de campo en dichos nodos, se tiene:

$$\begin{aligned} c^i u^i = & \left\{ \sum_{j=1}^{NE_1} \left[ \int_{\Gamma_1'} u^* \Phi d\Gamma \right] \cdot p^j - \sum_{j=1}^{NE_1} \left[ \int_{\Gamma_1'} p^* \Phi d\Gamma \right] \cdot u^j \right\} \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^{NE_2} \left[ \int_{\Gamma_2'} u^* \Phi d\Gamma \right] \cdot p^j - \sum_{j=1}^{NE_2} \left[ \int_{\Gamma_2'} p^* \Phi d\Gamma \right] \cdot u^j \right\} \\ & + \left\{ \sum_{j=NE_2+1}^{\infty} \left[ \int_{\Gamma_2'} u^* \Phi d\Gamma \right] \cdot p^j - \sum_{j=NE_2+1}^{\infty} \left[ \int_{\Gamma_2'} p^* \Phi d\Gamma \right] \cdot u^j \right\} \end{aligned} \quad (160)$$

donde  $NE_1$  es el número de elementos situados sobre la superficie  $\Gamma_1$ ;  $NE_2$  es el número de los elementos de  $\Gamma_2$  más cercanos a  $\Gamma_1$ , habiéndose considerado separadamente la integral sobre  $\Gamma_2$  a partir del elemento  $NE_2$ . Esta última integral será tratada de forma particular en el problema del cálculo de las rigideces de la cimentación.

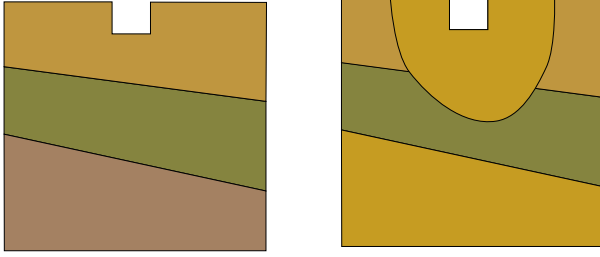


Figura 13: Terrenos no homogéneos

Si el medio estuviera formado por una serie de subdominios de propiedades distintas (estratos), su geometría será normalmente de un tipo de la figura 13. En estos casos basta plantear la representación integral para cada uno de los contornos de los subdominios considerados y efectuar el acoplamiento

mediante las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en las interfases estrato-estrato.

### 4.3 Cálculo de impedancias

El modelo seguido será considerar la zapata como un sólido rígido. Esta consideración simplifica enormemente los cálculos y el error cometido es más que asumible. Así, obteniendo los resultados sobre un punto será suficiente para obtener el resultado del conjunto pues las distancias entre los distintos puntos siempre será constante.

Sea un vector de desplazamientos  $\mathbf{u}$  de un punto cualquiera de coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $\mathbf{u}^c$  un vector de desplazamientos como sólido rígido de la cimentación para un punto de referencia  $(x_r, y_r, z_r)$  y  $\mathbf{L}$  una matriz de transformación que depende de la posición del punto de cálculo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_x, u_y, u_z)^T \\ \mathbf{u}^c &= (u_x^c, u_y^c, u_z^c, \theta_x^c, \theta_y^c, \theta_z^c)^T \\ \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z_i - z_r) & (y_r - y_i) \\ 0 & 1 & 0 & (z_r - z_i) & 0 & (x_i - x_r) \\ 0 & 0 & 1 & (y_i - y_r) & (x_r - x_i) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (161)$$

Dados los desplazamientos y giros como sólido rígido de la cimentación, los desplazamientos del punto de cálculo del movimiento podrán expresarse mediante:

$$\mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{u}^c \quad (162)$$

Si se calculan las tracciones que la cimentación ejerce sobre el terreno en aquel contorno en el que ambos se hallan en contacto (la interfase cimentación-terreno, denominada  $\Gamma_1$ ), se podrá obtener la resultante de las tracciones en el punto de referencia, mediante la integración de las mismas sobre dicha superficie:

$$\mathbf{R}^c = \int_{\Gamma_1} \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{p} \, d\Gamma \quad (163)$$

donde  $\mathbf{L}^T$  es la matriz traspuesta de la matriz  $\mathbf{L}$  anterior y  $\mathbf{p}$  es el vector tensión en cada punto



de la cimentación. Si se supone la superficie  $\Gamma_1$  discretizada en  $NE_1$  elementos, cada uno de ellos con  $N_j$  nodos, la expresión anterior será:

$$\mathbf{R}^c = \sum_{j=1}^{NE_1} \sum_{i=1}^{N_j} (\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{p}^i \cdot \phi^i) \quad (164)$$

La resultante será:

$$\mathbf{R}^c = (R_x^c, R_y^c, R_z^c, M_x^c, M_y^c, M_z^c)^T \quad (165)$$

y corresponde a la carga que es necesario aplicar sobre la cimentación para producir en ella un movimiento determinado, definido inicialmente.

La resultante de esfuerzos, y los desplazamientos y giros como sólido rígido, están relacionados mediante la expresión:

$$\mathbf{R}^c = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^c \quad (166)$$

definiéndose cada uno de sus términos  $K_{ij}$  como la resultante de las tensiones en la dirección  $i$ , en un punto de referencia  $\mathbf{r} = (x_r, y_r, z_r)$ , que se producen sobre la cimentación al aplicar a esta un desplazamiento o giro según  $j$  como sólido rígido unitario, supuesto este movimiento referido a idéntico punto que la resultante.

Normalmente, el punto de referencia respecto al cual se aplican los desplazamientos y giros como sólido rígido se elige en las coordenadas  $X_1$  y  $X_2$  del centro de gravedad de la cimentación y en la coordenada  $X$  del fondo de esta.

Para obtener las impedancias se impondrá la condición de tensión nula sobre el contorno  $\Gamma_2$  (superficie libre) y se aplicará un desplazamiento o giro unitario sobre el contorno  $\Gamma_1$ . Así, se podrá plantear para cada nodo una relación de desplazamiento como (160), y el conjunto formará un sistema de ecuaciones teniendo como incógnitas los desplazamientos en la superficie libre del suelo y las tensiones sobre la interfase, o lo que es lo mismo, sobre la cimentación. Una vez conocidas estas tensiones se podrá calcular su resultante respecto al punto de referencia con lo cual se obtiene la columna de la matriz de rigidez de la cimentación correspondiente al movimiento impuesto.

Debido a que la excitación del problema se encuentra confinada en la cimentación es razonable pensar que la contribución de las sucesivas integrales sobre la superficie  $\Gamma_2$  se hace menor a medida que el punto sobre el cual se integra se aleja, ya que las tensiones y desplazamientos correspondientes a la solución fundamental son respectivamente de orden  $\frac{1}{r^2}$  y

$\frac{1}{r}$  siendo  $r$  la distancia entre los puntos de aplicación de la carga puntual armónica (estado de Stokes) y de cálculo del movimiento o tensión.

Si se plantea la ecuación (160) para un nodo  $i$  cualquiera de la interfase o de la superficie libre de tensiones se tendrá:

$$\begin{aligned} c^i u^i = & \left\{ \sum_{j=1}^{NE_1} \left[ \int_{\Gamma_1'} u^* \Phi \cdot J \cdot d\xi \right] \cdot p^j - \sum_{j=1}^{NE_1} \left[ \int_{\Gamma_1'} p^* \Phi \cdot J \cdot d\xi \right] \cdot u^j \right\} \\ & + \left\{ - \sum_{j=1}^{NE_2} \left[ \int_{\Gamma_2'} p^* \Phi \cdot J \cdot d\xi \right] \cdot u^j \right\} \\ & + \left\{ - \sum_{j=NE_2+1}^{\infty} \left[ \int_{\Gamma_2'} p^* \Phi \cdot J \cdot d\xi \right] \cdot u^j \right\} \end{aligned} \quad (167)$$

que puede escribirse como:

$$c^i \cdot u^i = I_{\Gamma_1} - I_{\Gamma_2}^o - I_{\Gamma_2}^{\infty} \quad (168)$$

Si se supone que la discretización sobre  $\Gamma_2$  se lleva lo bastante lejos de la cimentación como para que se cumpla que:

$$I_{\Gamma_2}^{\infty} \ll I_{\Gamma_2}^o \quad ; \quad I_{\Gamma_2}^{\infty} \ll I_{\Gamma_1} \quad (169)$$

se podrá despreciar la contribución de  $I_{\Gamma_2}^{\infty}$  en (168).

En general, para obtener impedancias verticales es suficiente con relaciones  $4E$ , mientras que para el resto suele ser suficiente con  $10E$  siendo  $E$  el enterramiento de la zapata.

## Capítulo 5

### Verificación con resultados de Abascal y Domínguez [Domínguez y otros, 1993] para semiespacio viscoelástico

#### 5.1 Descripción general del problema

Según lo comentado anteriormente, la división de Mecánica de los Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (IUSIANI) dispone de un software basado en el Método de Elementos de Contorno (MEC), el cual será el utilizado en este TFM. Se trata del software *Multifebe*. Para validarlo se procederá a comparar los resultados obtenidos por este con los obtenidos por Domínguez en un problema de cálculo de impedancias y que se encuentran disponibles en el libro *Boundary Elements in Dynamics*.

El problema consiste en obtener las impedancias vertical, horizontal, de cabeceo y torsión de una zapata circular de radio  $R=B=4$  m para diferentes grados de embebimiento que descansa sobre un terreno que se modelizará como viscoelástico. Así, será suficiente considerar las siguientes propiedades:

Propiedades		
	Símbolo	Valor y unidades
Módulo de elasticidad transversal	$G$	$1 \frac{N}{m^2}$
Módulo de Poisson	$\nu$	0,25
Amortiguamiento	$\xi$	0,05
Densidad	$\rho$	$1 \frac{kg}{m^3}$

Tabla 1: Propiedades del terreno viscoelástico a analizar

Se debe prescribir un desplazamiento o giro unitario en la dirección a obtener la impedancia a todos los nodos de la interfase zapata-suelo, considerando tensión nula para el resto de direcciones, de manera que así se calcularán las partes real e imaginaria de la flexibilidad del terreno, las cuales no son otra cosa que los valores inversos de las partes real e imaginaria de la rigidez dinámica, respectivamente, también para ese grado de libertad. Además, el amortiguamiento por radiación es altamente dependiente de la frecuencia. Debido a esto, las componentes de la rigidez usualmente se escriben como:

$$K_{ij} = k_{ij} + i \cdot a_0 \cdot c_{ij} \quad (170)$$

donde  $k_{ij}$  son las rigideces dinámicas,  $c_{ij}$  los coeficientes de amortiguamiento,  $a_0 = \frac{\omega \cdot B}{c_s}$  es la frecuencia adimensional,  $B$  es la longitud característica (semiancho o diámetro) de la cimentación, y  $c_s$  es la velocidad de la onda transversal.

En la figura 14 está el modelo utilizado por Domínguez y el modelo 3D equivalente mallado (con doble plano de simetría). Domínguez utilizó un modelo 2D que giraba sobre un eje de revolución. Se trataba, por tanto, de un modelo axisimétrico. En este caso, se procederá con un modelo 3D del cual solo se modelizará un cuarto con dos ejes de simetría. La superficie libre se malló con elementos triangulares y tiene una mayor cantidad de elementos en la zona próxima a la cimentación. La superficie de la zapata se malló con elementos cuadrangulares con una ratio no mayor de 2. En todos los casos se utilizarán elementos de segundo orden. Según Domínguez, es suficiente escoger un largo  $A$  de superficie libre de  $7E$ . En este caso, se procedió a imponer la condición más conservadora de si  $B > E$ , entonces  $A = 10B$ ; si no  $A = 10E$ .

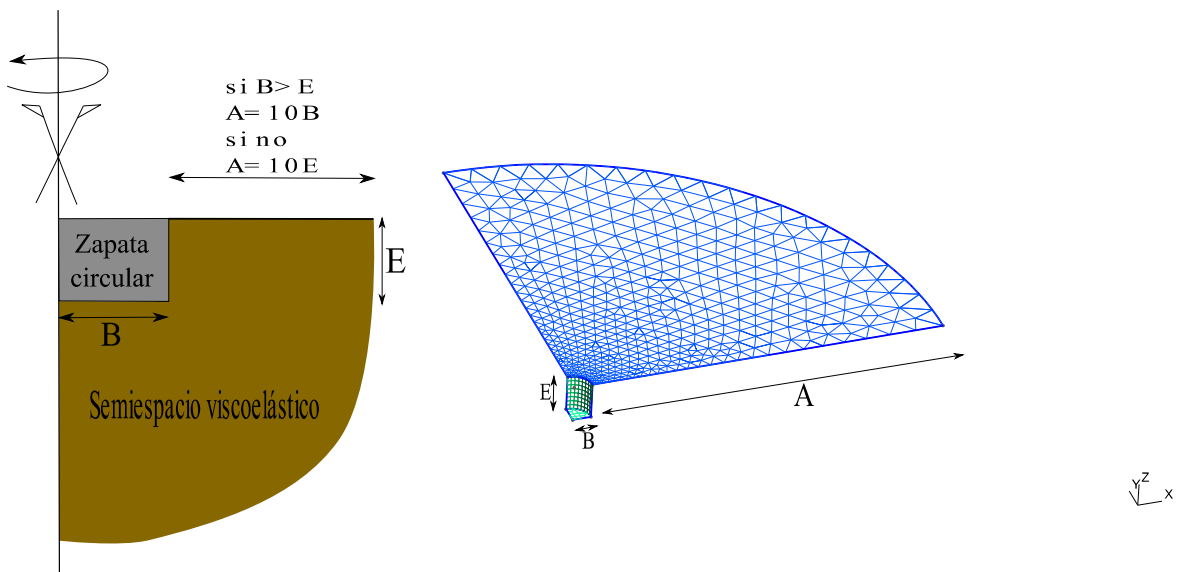


Figura 14: Modelo axisimétrico y modelo 3D equivalente (doble simetría) con mallado

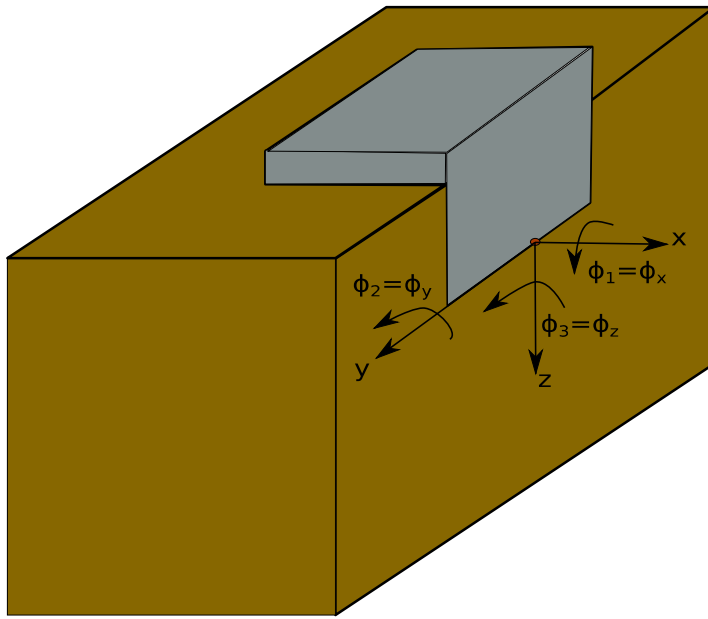


Figura 15: Sistema de referencia y punto de aplicación utilizado por Domínguez

Una cuestión importante es el sistema de referencia y el punto de aplicación de los desplazamientos y giros. Para impedancias vertical, horizontal y torsión no afecta al resultado si se considera la aplicación sobre la superficie superior o inferior de la zapata. Sin embargo, sí que lo hace para cabeceo. El modelo de Domínguez lo consideró en la superficie inferior. Sin embargo, en este caso el punto (0,0,0) está en la superficie superior. Así, cuando se tiene una fuerza aplicada en un punto, es posible trasladarla a otro mediante la

misma fuerza y un par equivalente. Con este principio básico de Mecánica y el principio de superposición podrá resolverse el problema. De las figuras siguientes (16), (17) y (18):

- Punto considerado

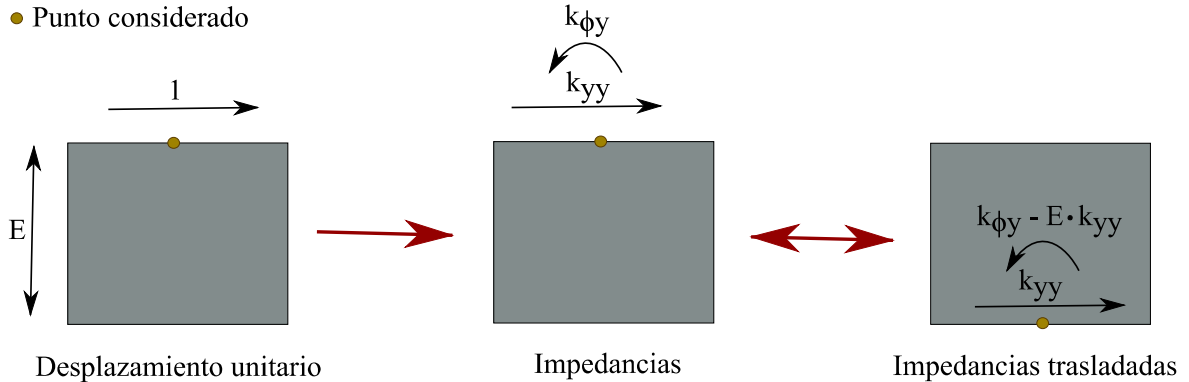


Figura 16: Problema horizontal. Desplazamiento de las impedancias desde el contorno superior al inferior

- Punto considerado

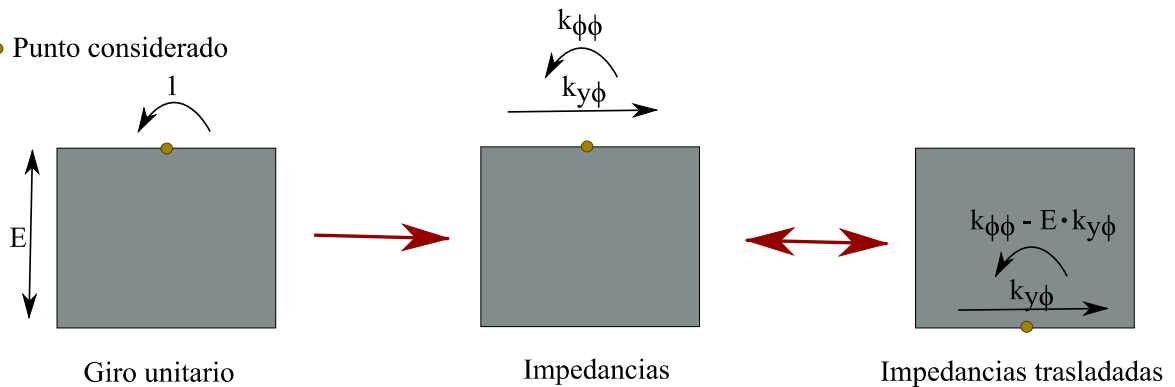


Figura 17: Problema de cabeceo. Desplazamiento de las impedancias desde el contorno superior al inferior.

- Punto considerado

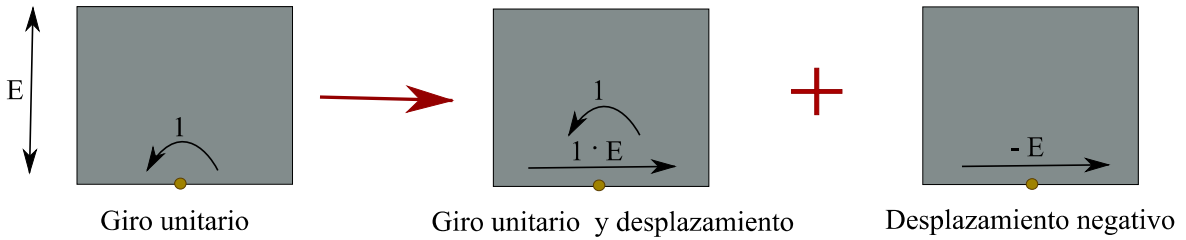


Figura 18: Superposición del problema horizontal y de cabeceo

se obtiene la fórmula de corrección:

$$k_{\phi\phi}^a = [k_{\phi\phi}^b - k_{y\phi}^b \cdot E] + [k_{\phi y}^c - k_{yy}^b \cdot E] \cdot (-E) = k_{\phi\phi} - k_{y\phi} \cdot E - k_{\phi y} \cdot E + k_{yy} \cdot E^2 \quad (171)$$

Esta será la fórmula de corrección para pasar de la superficie superior de la zapata a la inferior en el caso de impedancia de cabeceo.

Por otra parte, los resultados obtenidos por Domínguez no se disponen en soporte informático, sino en papel en forma de gráfica. Por tanto, se deberá pasar esa gráfica del papel a soporte informático para ser procesado en Matlab. Se utilizará un software libre para obtener una nube de puntos de las curvas solución de Domínguez. Luego, con Matlab se ploteará.

## 5.2 Resultados obtenidos

### 5.2.1 Impedancias verticales

En la figura 19 se muestran los resultados obtenidos para impedancia vertical. A la izquierda está la rigidez y a la derecha el amortiguamiento. La leyenda “BEM” representa la solución de nuestro modelo y “Domínguez” representa la solución obtenida por ese investigador con el modelo axisimétrico. La rigidez dinámica está normalizada con el factor  $GB$ , mientras que el amortiguamiento lo está con el factor  $a_0 GB$  siendo  $a_0$  la frecuencia adimensional.

En los cuatro casos se observa un alto grado de concordancia de resultados. A medida que aumenta el grado de embebimiento aumenta la rigidez y el amortiguamiento. Una diferencia es que se han obtenido resultados con cierto rizado. Este rizado concuerda con los resultados obtenidos por Apsel (1979) y aumenta en la parte real con el aumento de la frecuencia. En el caso de la parte imaginaria ocurre lo contrario, esto es, a medida que aumenta la frecuencia, disminuye aquel. Esto es debido a la normalización pues en el término divisor está la frecuencia adimensional.

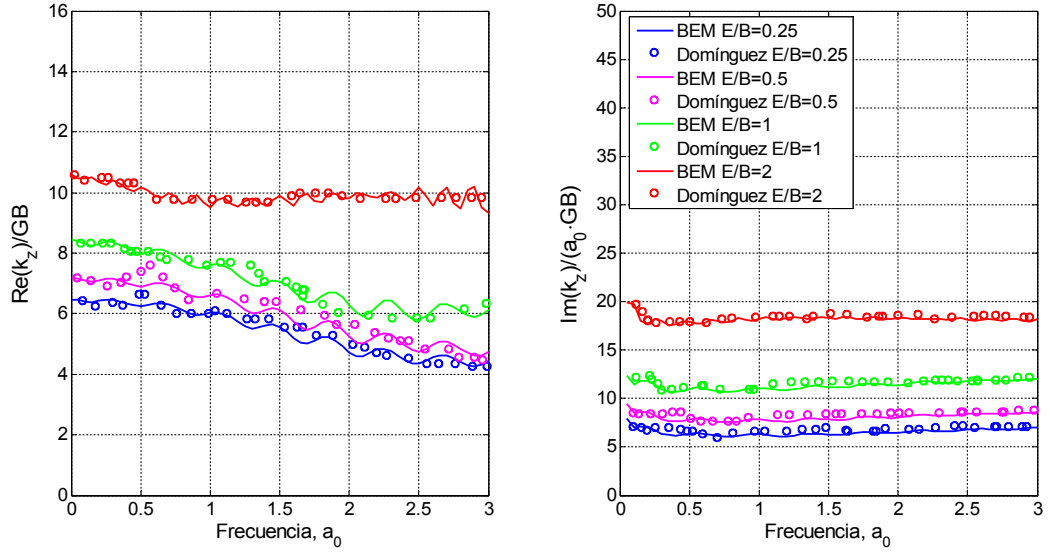


Figura 19: Impedancia vertical. Comparativa con resultados de Domínguez. Modelo axisimétrico vs Modelo 3D.

### 5.2.2 Impedancias horizontales

En la figura 20 se muestran los resultados obtenidos para impedancia horizontal. Se seguirán los mismos criterios que en el caso vertical, esto es, a la izquierda está la rigidez y a la derecha el amortiguamiento. La rigidez dinámica está normalizada con el factor  $GB$ , mientras que el amortiguamiento lo estará con el factor  $a_0 GB$ .

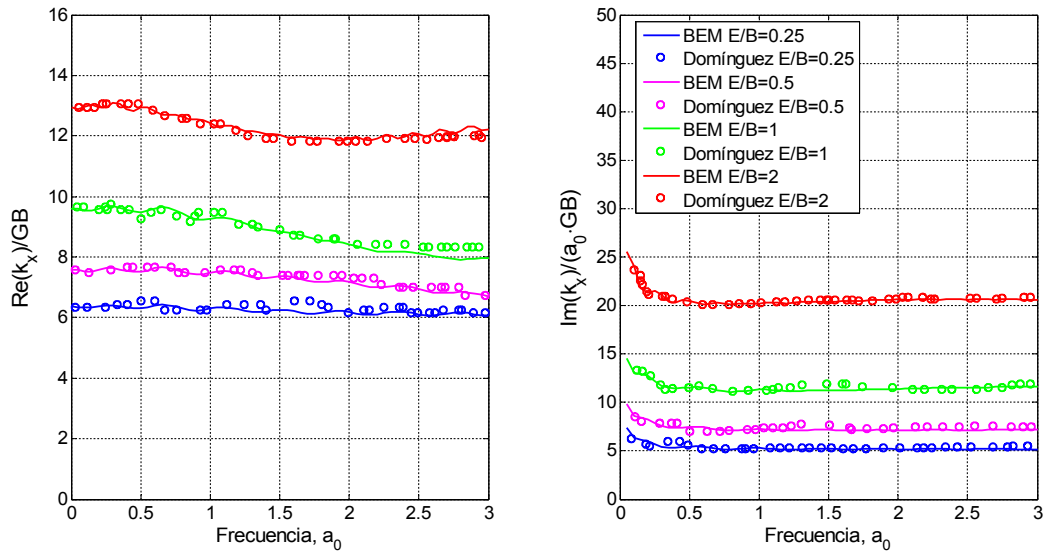


Figura 20: Impedancia horizontal. Comparativa con resultados de Domínguez. Modelo axisimétrico vs Modelo 3D.

Al igual que en el caso de impedancias verticales, en los cuatro casos se observa un

alto grado de concordancia de resultados y, respecto de su lectura, siguen las mismas tendencias que en el caso vertical, esto son, un aumento de la rigidez y amortiguamiento con el aumento del grado de embebimiento y la aparición de cierto rizado que no se aprecia en la solución de Domínguez pero sí en la de Apsel.

### 5.2.3 Impedancias de cabeceo

Ahora se mostrarán los resultados obtenidos para cabeceo y se utilizará la fórmula de corrección (171) calculada anteriormente. Respecto de las gráficas, el factor normalizador será  $GB^3$  para la rigidez dinámica y, para el amortiguamiento,  $a_0 GB^3$ . Además, ahora se plotearán dos gráficas (figuras 22 y 23). Una muestra los resultados obtenidos considerando el sistema de referencia arriba (origen de sistema 1), que es el que se ha utilizado para las otras impedancias. La segunda muestra los resultados obtenidos cuando se corrigen con la fórmula (171).

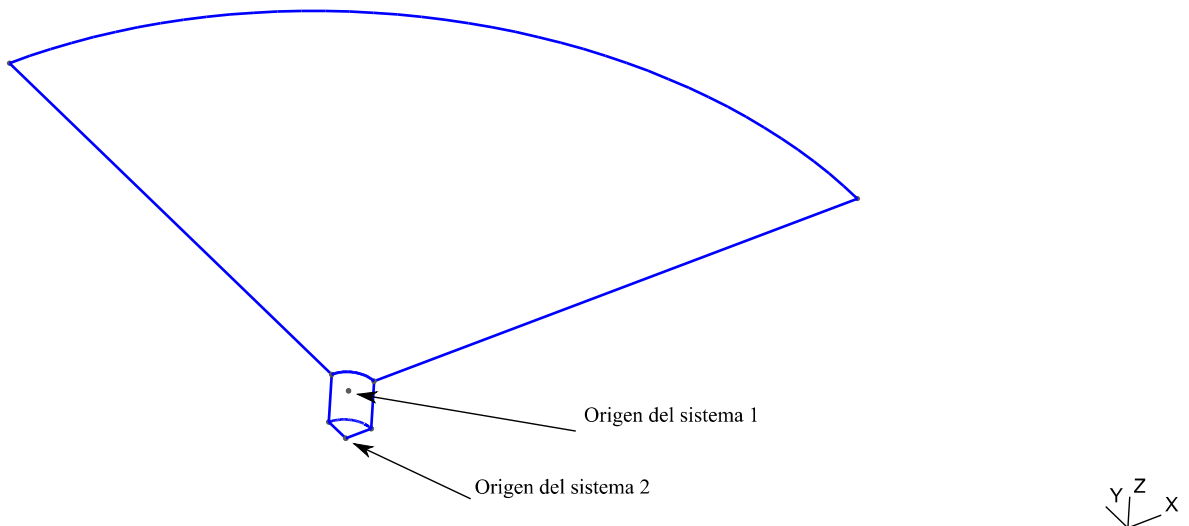


Figura 21: Orígenes de los puntos de referencia utilizados para impedancia de cabeceo

Además, como ejemplo de que se puede obtener directamente, se calculó la curva  $E/B=2$  sin corregir con (171), cambiando las coordenadas en el modelo que se malló (en la leyenda está como “BEM E/B=2 Directo”).

Respecto de los resultados de la figura 22 (cabeceo sin corrección), se puede ver que, a medida que crece el grado de embebimiento, el salto se hace mayor. De la misma manera que, para un grado de embebimiento de  $E/B=0,25$  se puede considerar innecesario corregir la impedancia pues, prácticamente, tiene el mismo valor.



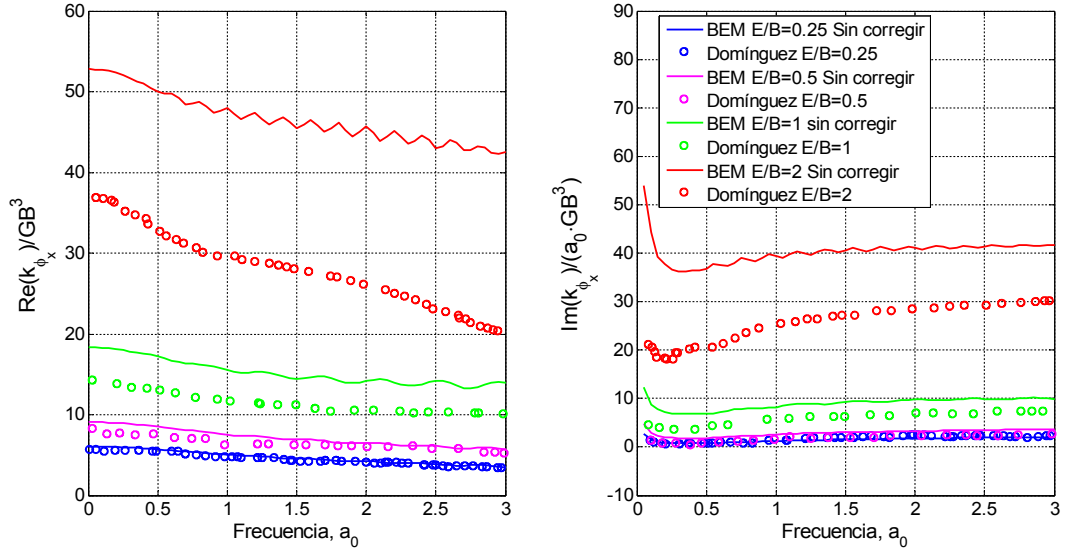


Figura 22: Impedancia de cabeceo. Comparativa con resultados de Domínguez utilizando el origen del sistema 1. Modelo axisimétrico vs Modelo 3D.

También se observa como la impedancia de cabeceo aumenta con el incremento del grado de embebimiento tanto en parte real como imaginaria, y que aparece un cierto rizado que aumenta con el incremento de la frecuencia en la rigidez y disminuye en el amortiguamiento. Por último, se ve que tratando adecuadamente el modelo con el generador de mallas se puede calcular directamente el resultado (“BEM E/B=2 Directo”).

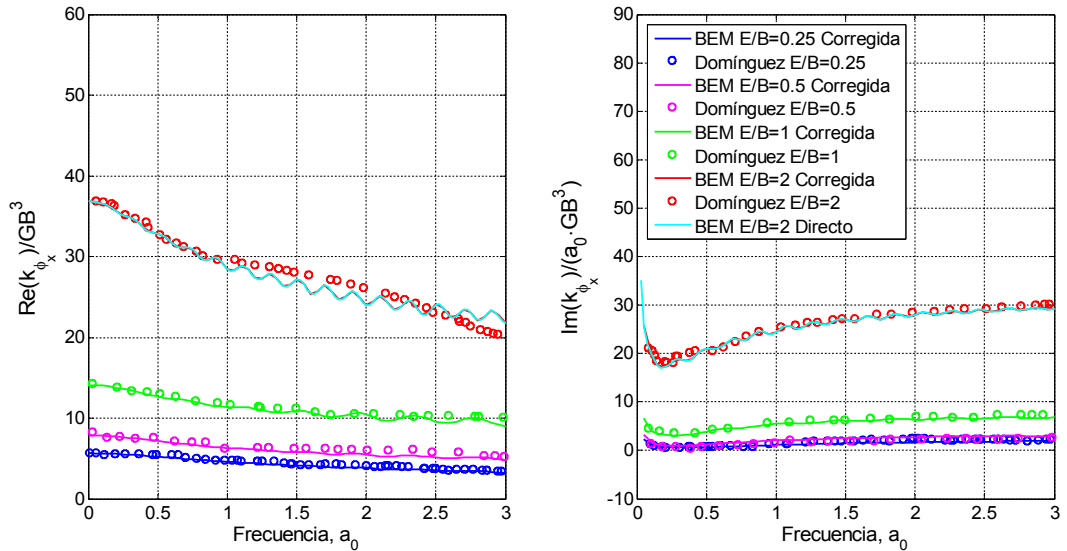


Figura 23: Impedancia de cabeceo. Comparativa con resultados de Domínguez utilizando el origen del sistema 2. Modelo axisimétrico vs Modelo 3D.

### 5.2.4 Impedancias de torsión

Por último, se mostrarán los resultados para torsión.

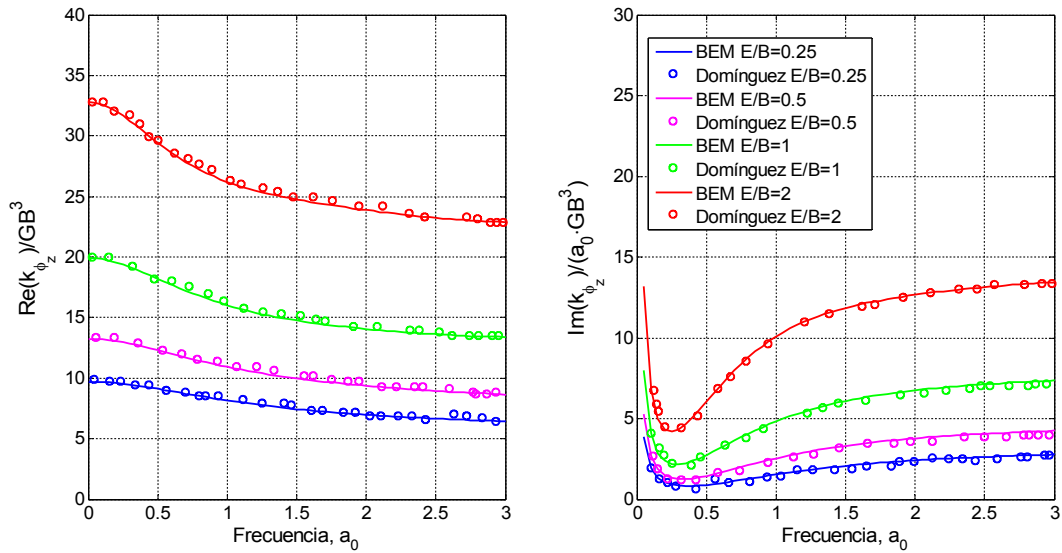


Figura 24: Impedancia de torsión. Comparativa con resultados de Domínguez. Modelo axisimétrico vs Modelo 3D.

Los factores de normalización serán los mismos que para cabeceo. Las impedancias de torsión son las que menos rizado presentan. Al igual que el resto, con el aumento del grado de embebimiento aumenta la rigidez y el amortiguamiento. También se observa que en la parte real a medida que aumenta la frecuencia disminuye la rigidez. En la parte imaginaria hay una disminución importante al inicio y luego aumenta rápidamente con el incremento de la frecuencia.

### 5.2.5 Conclusiones

Se han obtenido valores muy parecidos a los esperados por lo que el programa *Multifebe* demuestra que es adecuado para el estudio de impedancias en semiespacio viscoelástico. No se sabe la causa exacta, pero este código es capaz de apreciar cierto rizado que no se aprecia en la solución axisimétrica. Apsel (1979) también calculó este problema y obtuvo rizado en la solución por lo que, aparentemente, la solución correcta presenta cierta tendencia ondulante.

## **Capítulo 6**

### ***Verificación con resultados obtenidos por Aznárez, Maeso y Chirino [Aznárez y otros, 1999] en superficie poroelástica***

#### ***6.1 Descripción general del problema***

Hace algún tiempo, tres investigadores de esta Universidad obtuvieron una serie de resultados aplicando el MEC sobre superficie poroelástica, los cuales fueron publicados en el primer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, en el año 1999 [Aznárez, J. J., Maeso, O. y Chirino, F., (1999), “Una Técnica Numérica para la Determinación de Rigideces Dinámicas de Cimentaciones sobre Suelos Saturados”. Proc. I Congreso Nacional Ing. Sísmica, Murcia].

En este capítulo se calcularán los mismos problemas con el software *Multifebe*, con el fin de poder comprobar la validez de este código. Estos problemas tienen una dificultad mayor que el calculado en el capítulo anterior pues, como se verá, añade una segunda región.

Según lo dicho anteriormente, el terreno se modelizará como poroelástico, disponiendo pues de una fase sólida (esqueleto) y de una fluida. Algunas propiedades serán fijas y otras se variarán. Las fijas serán (tabla 2):

Propiedades		
	Símbolo	Valor y unidades
Módulo de elasticidad transversal	$G$	$3,2175 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$
Módulo de Poisson	$\nu$	0,25
Densidad del sólido	$\rho_s$	$1.425 \frac{kg}{m^3}$
Densidad del fluido	$\rho_f$	$1.000 \frac{kg}{m^3}$
Porosidad	$\phi$	0,35
Constante de Biot (I)	$Q$	$4,61 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2}$
Constante de Biot (II)	$R$	$2,4823 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2}$

*Tabla 2. Propiedades fijas para problema de validación*

Las propiedades que se irán variando serán (tabla 3):

Propiedades		
	Símbolo	Valor y unidades
Densidad añadida	$\rho_a$	$\rho_{a_1}=0 \frac{kg}{m^3}$ ; $\rho_{a_2}=150 \frac{kg}{m^3}$
Amortiguamiento	$\xi$	$\xi_1=0$ ; $\xi_2=0,05$
Constante de disipación	$b$	$b_1=1,1986 \cdot 10^7 \frac{N \cdot s}{m^4}$ ; $b_2=1,1986 \cdot 10^6 \frac{N \cdot s}{m^4}$ ; $b_3=1,1986 \cdot 10^5 \frac{N \cdot s}{m^4}$ ; $b_4=1,1986 \cdot 10^4 \frac{N \cdot s}{m^4}$ ; $b_5=0 \frac{N \cdot s}{m^4}$

*Tabla 3. Propiedades variables para problema de validación*

Se obtendrán impedancias para zapata superficial, diferentes grados de embebimiento, con

estrato poroelástico y base rígida y, finalmente, con estrato poroelástico y base viscoelástica.

El modelo utilizado será una zapata cuadrada de ancho  $2B$ , enterramiento  $E$ , potencia del terreno  $H$  y superficie libre a discretizar  $A=10B$ . Dado que es doblemente simétrico, solo se empleará un cuarto de modelo.

## 6.2 Segundo problema de validación y resultados obtenidos

En la figura 25 se muestra el problema planteado con un ejemplo de discretización:

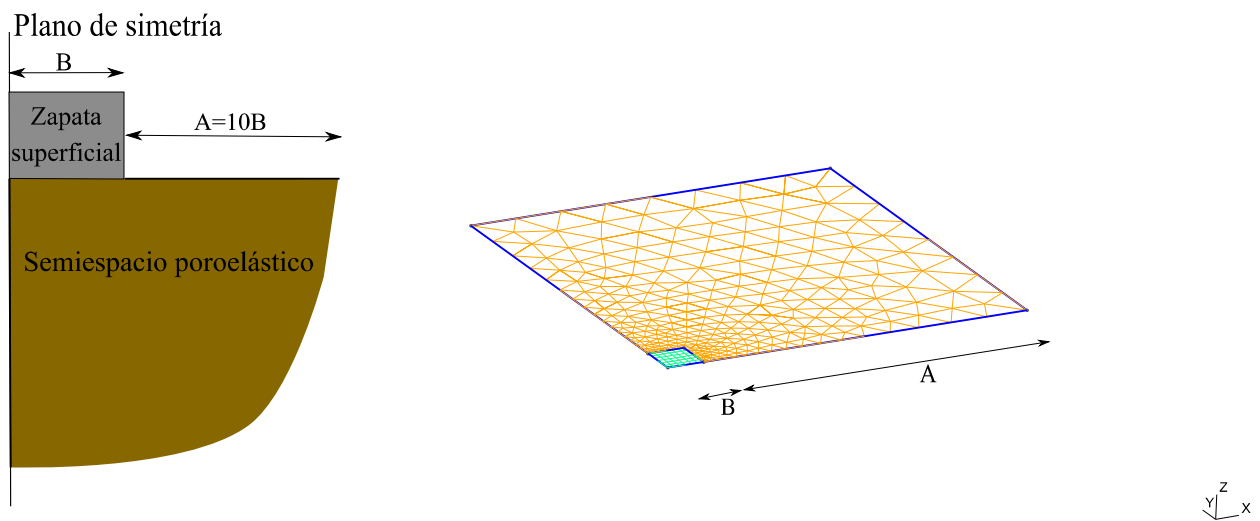


Figura 25: Segundo problema de validación en semiespacio poroelástico con modelo mallado

Se trata de una zapata superficial que descansa sobre un semiespacio poroelástico. La superficie libre se ha mallado con elementos triangulares habiendo una mayor cantidad en la zona próxima a la cimentación. La superficie ocupada por la zapata se ha mallado con elementos cuadrangulares. En todos los casos son elementos de segundo orden.

Como norma general, respecto de las gráficas, a la izquierda está la rigidez dinámica y a la derecha el amortiguamiento. En la horizontal está la frecuencia adimensional  $a_0$  y en las verticales las impedancias, las cuales están normalizadas. Las impedancias verticales y horizontales se han normalizado con  $GB$ , mientras que cabeceo y torsión se han normalizado con  $GB^3$ . Dada la variedad de propiedades para cada problema, en la zona superior de cada gráfica se da información sobre las propiedades comunes utilizadas para ese problema en particular. Luego, en las leyendas, se añaden las propiedades utilizadas para cada curva solución. Se seguirá el mismo orden en la presentación de resultados que la dispuesta en el documento referenciado anteriormente. Así, se

comienza con los resultados obtenidos.

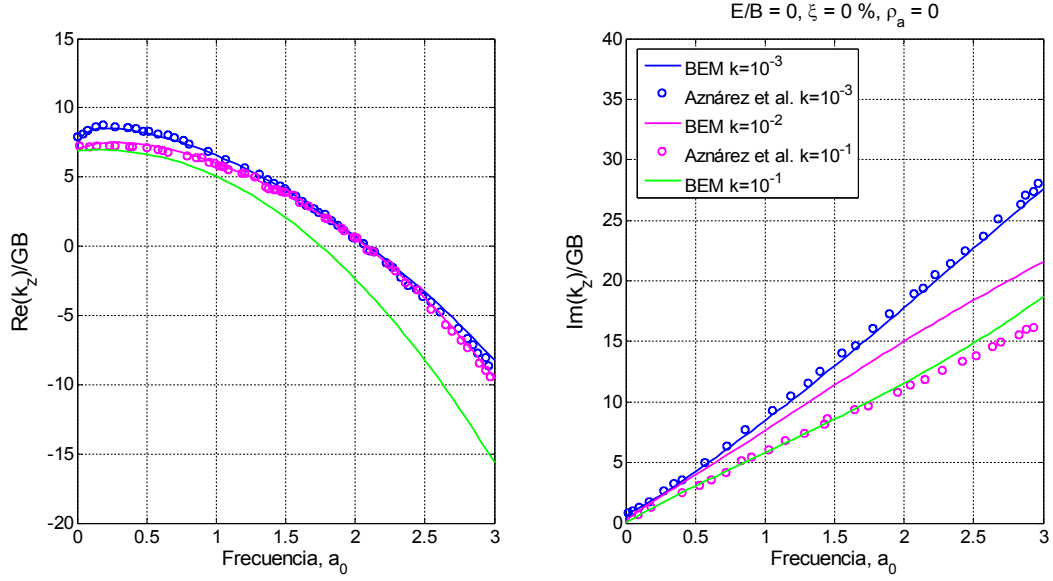


Figura 26: Impedancia vertical. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre semiespacio poroelástico.

Comenzando con la figura 26, se obtuvieron los resultados para las permeabilidades  $k=10^{-1}$  y  $k=10^{-3}$  comprobando que, en la parte real, sí había coincidencia, pero no en la imaginaria. Así, se probó con  $k=10^{-2}$ . Esta última  $k$  es la considerada correcta. Se asocia a un error de imprenta. Respecto de la concordancia, se observa un alto grado. Solo a altas frecuencias

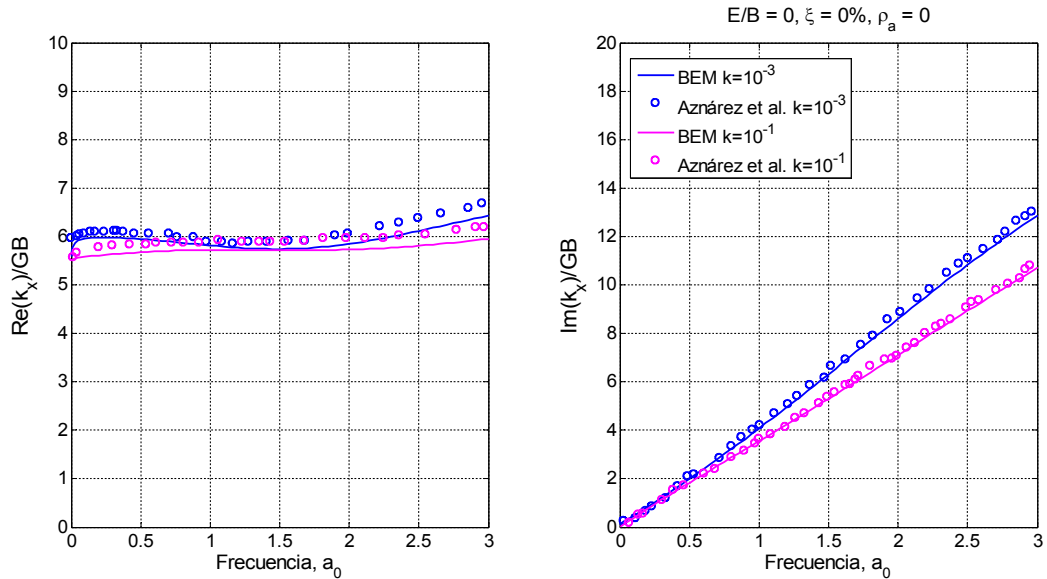


Figura 27: Impedancia horizontal. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre semiespacio poroelástico.

hay cierta diferencia pero no es excesiva. Esta diferencia se asocia a que los mallados empleados son distintos siendo el utilizado en este TFM es mucho más denso.

Por otro lado, en impedancia horizontal (fig. 27), se han obtenido unos valores de rigidez dinámica ligeramente inferiores. Este efecto se asocia, como ya se ha comentado, al mallado más fino que se ha empleado. No obstante, la concordancia es excelente, siendo prácticamente calcada en el amortiguamiento.

En la figura 28 se observa el mismo caso que en impedancia vertical respecto de los valores de  $k$ . Hay coincidencia en rigidez para las permeabilidades  $k=10^{-1}$  y  $k=10^{-3}$  pero no en amortiguamiento, habiéndola para  $k=10^{-3}$  y  $k=10^{-2}$ .

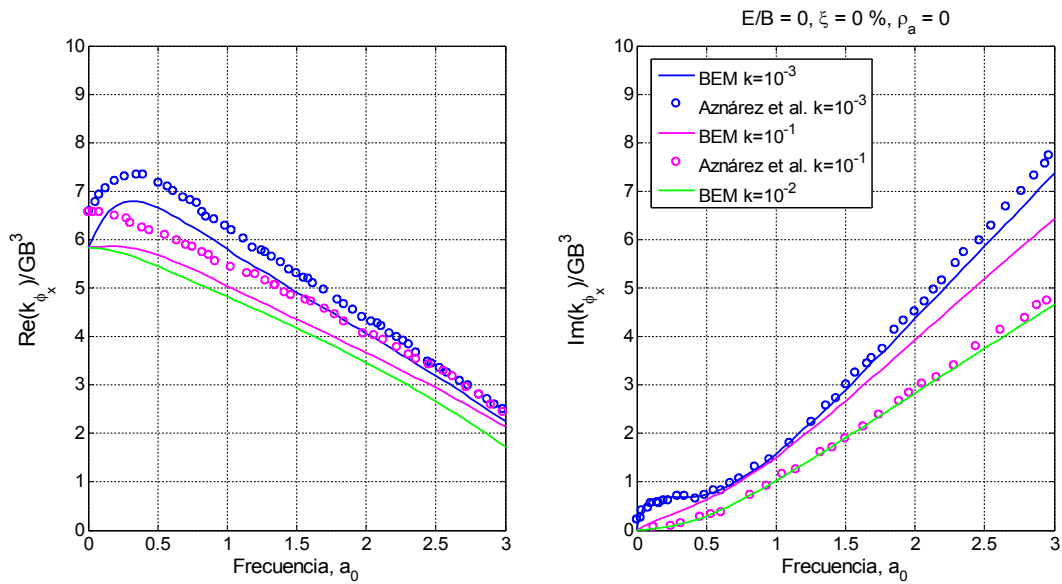


Figura 28: Impedancia de cabeceo. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre semiespacio poroelástico.

También, aunque parten del mismo valor (estático) y siguen la misma tendencia, hay un pequeño salto en el inicio. Para saber cuáles son las correctas, se utilizarán las fórmulas aproximadas de Domínguez que permiten obtener el valor estático. Según Domínguez, para el caso de cabeceo, el valor

estático es  $k_\phi = \frac{4,38}{1-0,25} \approx 5,84$ . Así, parece que la solución correcta es la nuestra.

Respecto de la tendencia, se observa el efecto pronunciado de incremento de rigidez dinámica a bajas frecuencias en cabeceo, típica de valores elevados de la constante de disipación, para luego decrecer. El amortiguamiento siempre es ascendente, siendo mayor cuanto mayor sea la constante de

disipación.

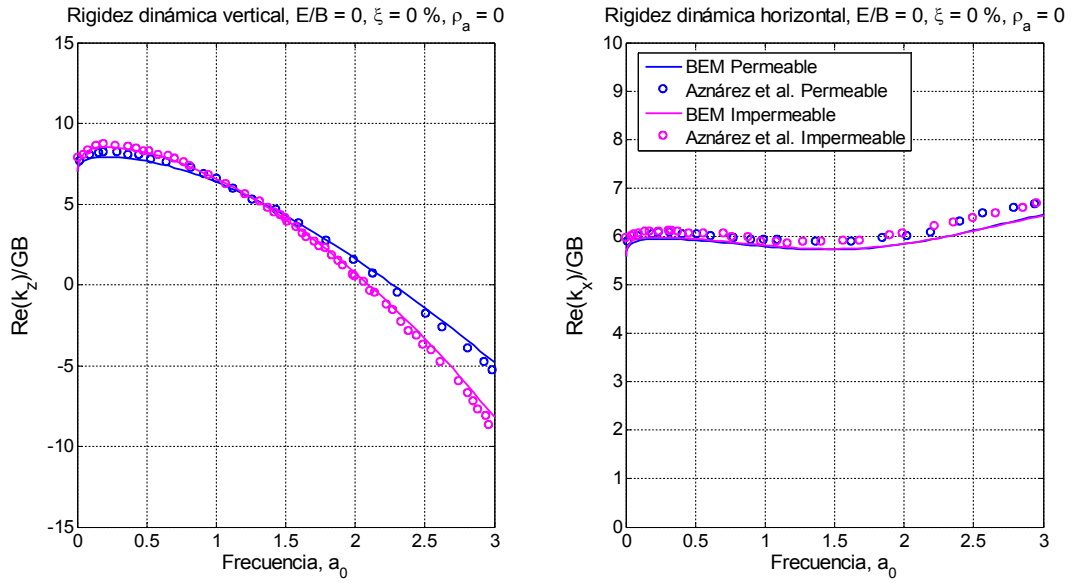


Figura 29: Rigidez dinámica vertical y horizontal. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre semiespacio poroelástico. Influencia de la permeabilidad.

Por último, se observa un claro paralelismo entre las soluciones de la figura 29. En la primera gráfica se muestra la rigidez vertical con una pequeña desviación a altas frecuencias. En la siguiente (rigidez horizontal) se observa el mismo efecto asociado al mallado, es decir, dado que se ha empleado uno más fino se han obtenidos unos valores ligeramente menores. Respecto del efecto de considerar el contorno permeable o impermeable, no se aprecia una diferencia significativa, siendo esto habitual en el caso de impedancia horizontal.

### 6.3 Tercer problema de validación y resultados obtenidos

A continuación, en la figura 30, se muestra el tercer problema de validación:

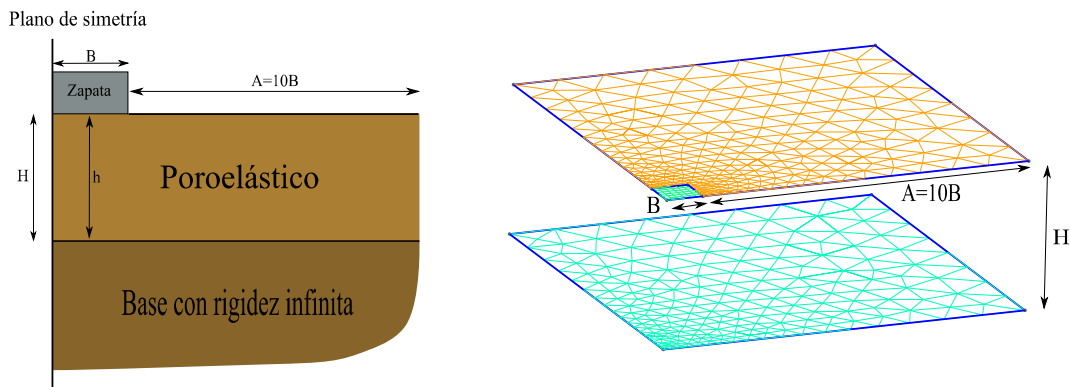
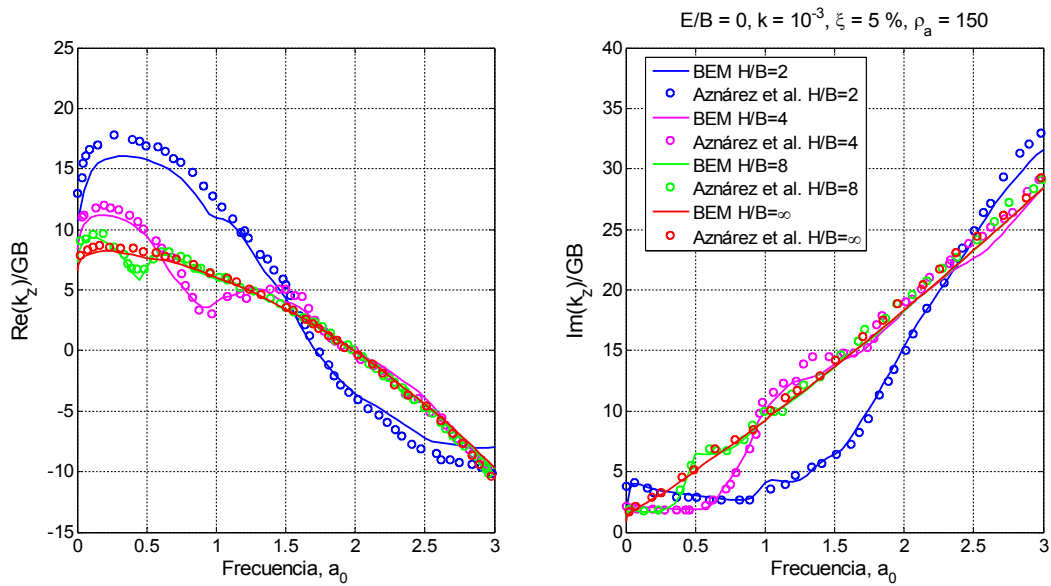


Figura 30: Tercer problema de validación: estrato poroelástico y base con rigidez infinita



Se trata de una zapata superficial que descansa sobre un estrato poroelástico, el cual tendrá un estrato de potencia  $H$  y una base con rigidez infinita. La superficie libre se ha mallado con elementos triangulares habiendo una mayor cantidad en la zona próxima a la cimentación. La superficie ocupada por la zapata se ha mallado con elementos cuadrangulares. En todos los casos son elementos de segundo orden.

Siguiendo los mismos criterios anteriores y respecto de las gráficas, en la horizontal está la frecuencia adimensional  $a_0$  y en las verticales las impedancias normalizadas. Los factores de normalización serán los mismos que en el problema anterior, esto son,  $GB$  para impedancias vertical y horizontal, y, para cabeceo y torsión,  $GB^3$ . Dada la variedad de propiedades para cada problema, en la zona superior de cada gráfica se da información sobre las propiedades comunes utilizadas para ese problema en particular. Luego, en las leyendas, se añaden las propiedades utilizadas para cada curva solución.



*Figura 31: Impedancia vertical. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre estrato de profundidad variable.*

Analizando la impedancia vertical (fig. 31), en el caso de  $H/B = 2$ , se observa un ligero descenso a lo esperado en la rigidez. Siguiendo el mismo razonamiento anterior, la explicación está en el mallado mucho más denso utilizado ahora. Para el resto de relaciones  $H/B$ , prácticamente, no hay diferencia. La tendencia es parecida a la de una onda, la cual, a medida que aumenta la relación  $H/B$ , se va aplanando. El camino que van siguiendo es la solución para  $H/B = \infty$ .

Si se analiza el amortiguamiento, el grado de concordancia es muy elevado, obteniendo

algún valor que se sale ligeramente de lo esperado pero, que, en cualquier caso, no es importante. Además, sigue el mismo comportamiento que en la rigidez, esto es, una onda que, a medida que aumenta la relación  $H/B$ , va reduciendo su amplitud, siguiendo el camino de  $H/B=\infty$ .

Analizando ahora la impedancia horizontal (fig. 32), en la parte real, se observa una ligera variación, que se asocia nuevamente al mallado más denso empleado ahora. A medida que la relación  $H/B$  se hace mayor, se obtiene una menor diferencia de resultados. En el caso límite  $H/B=\infty$ , se observa el mismo efecto que en resultados obtenidos anteriormente, es decir, una solución que es prácticamente paralela a la esperada, y ligeramente inferior.

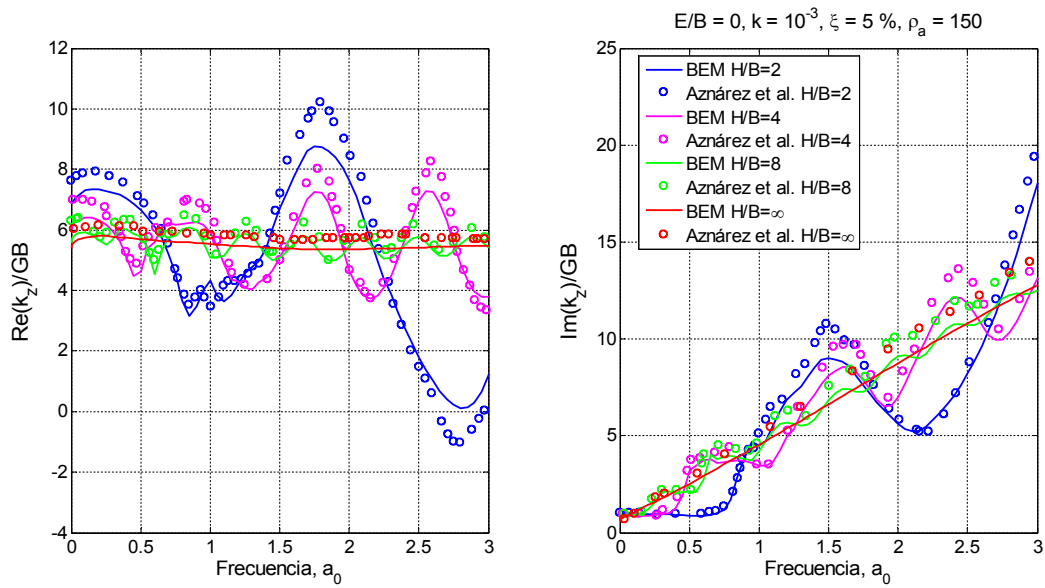


Figura 32: Impedancia horizontal. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre estrato de profundidad variable.

Respecto de la tendencia ondulatoria, para  $H/B$  bajas, se observan grandes amplitudes, disminuyendo a medida que crece  $H/B$ . El caso límite es  $H/B=\infty$ , con una tendencia casi plana.

Respecto del amortiguamiento, se parte de valores estáticos iguales y, luego, sigue el mismo comportamiento que la rigidez, es decir, valores ligeramente inferiores a los esperados. No obstante, en términos generales, el grado concordancia es elevado.

En cabeceo (fig.33), a medida que la relación  $H/B$  es mayor, la diferencia de resultados es menor. Pero, a pesar de esta diferencia, en el caso  $H/B=2$ , se considera que el grado de concordancia es bueno. En el caso límite de  $H/B=\infty$ , se ve que el valor estático es

aproximadamente de 5,85. Si se recuerda de problemas anteriores, según Domínguez ese valor debe ser de 5,84. Hay una ligera diferencia respecto de lo obtenido por la División hace algunos años a lo que no se ha encontrado explicación. En cualquier caso, la diferencia no es excesiva.

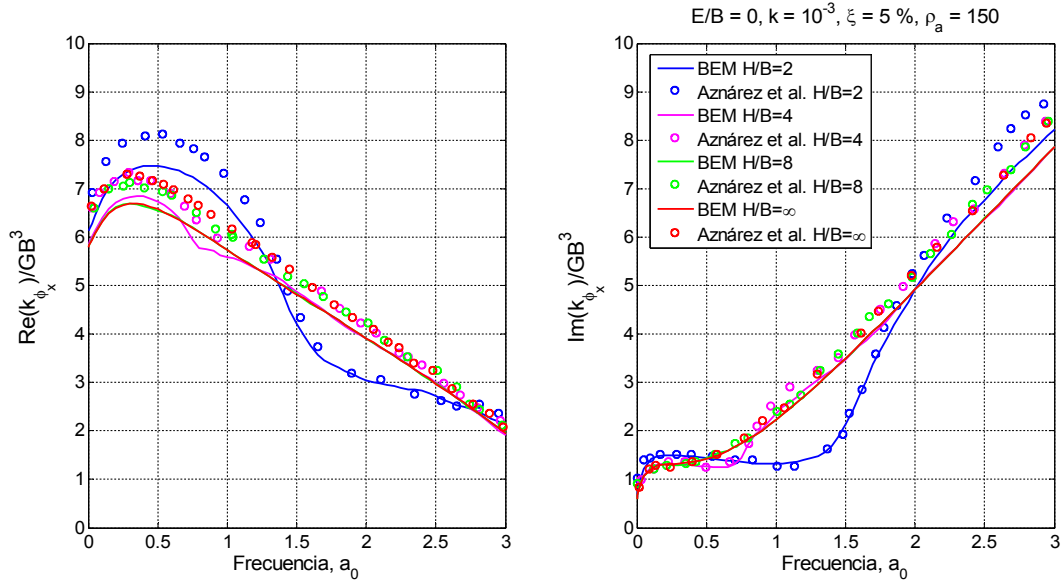


Figura 33: Impedancia de cabeceo. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre estrato de profundidad variable.

Respecto del amortiguamiento, sigue el mismo patrón que la rigidez, esto es, valores ligeramente menores, asociados, también, al mallado. La tendencia siempre es creciente y, para relaciones  $H/B$  bajas, ondulante con amplitudes importantes.

## 6.4 Cuarto problema de validación y resultados obtenidos

La figura 34 muestra el cuarto problema de validación con los contornos discretizados:

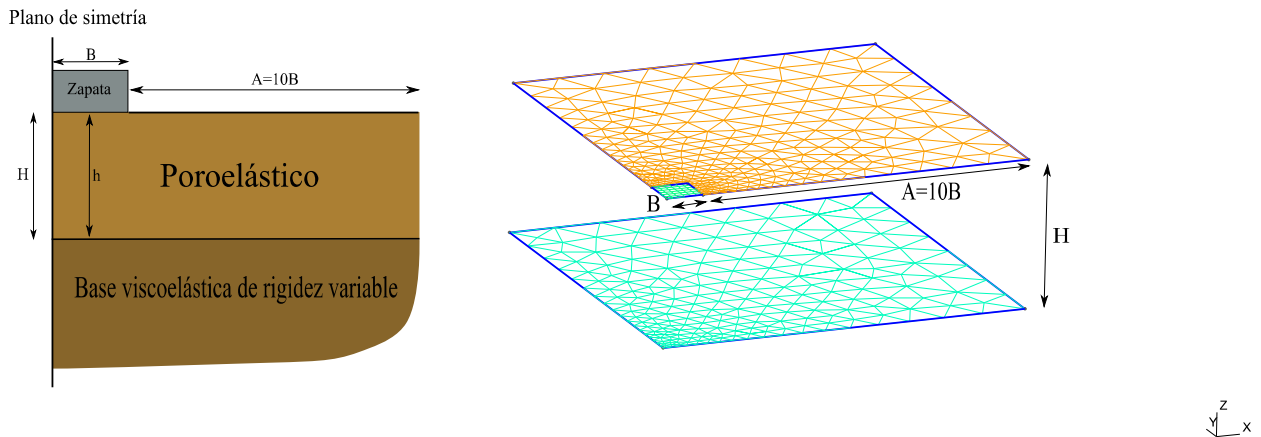


Figura 34: Cuarto problema de validación: estrato poroelástico y base viscoelástica de rigidez variable

Se trata de una zapata superficial que descansa sobre un estrato poroelástico de potencia  $H$  y, debajo, hay una base viscoelástica, de rigidez relativa con respecto al estrato superior, variable. Las relaciones serán:

$$RG = \frac{G_{base\ viscoelástica}}{G_{estrato\ poroelástico}} = [5, 10, 50, \infty]$$

Respecto de los mallados, se han seguido los mismos criterios que en el problema de validación anterior y, respecto de la lectura de resultados de las gráficas, también.

Se trata de una zapata superficial con una relación  $H/B=2$ , una permeabilidad de  $k=10^{-3} m/s$ , un amortiguamiento de  $\xi=0,05$  y una densidad añadida de  $\rho_a=150 kg/m^3$ .

En la figura 35 se observa como, a medida que las relaciones  $RG$  se hacen mayores, se produce un aplanamiento de las curvas, siguiendo el camino de la solución límite  $RG=\infty$ .

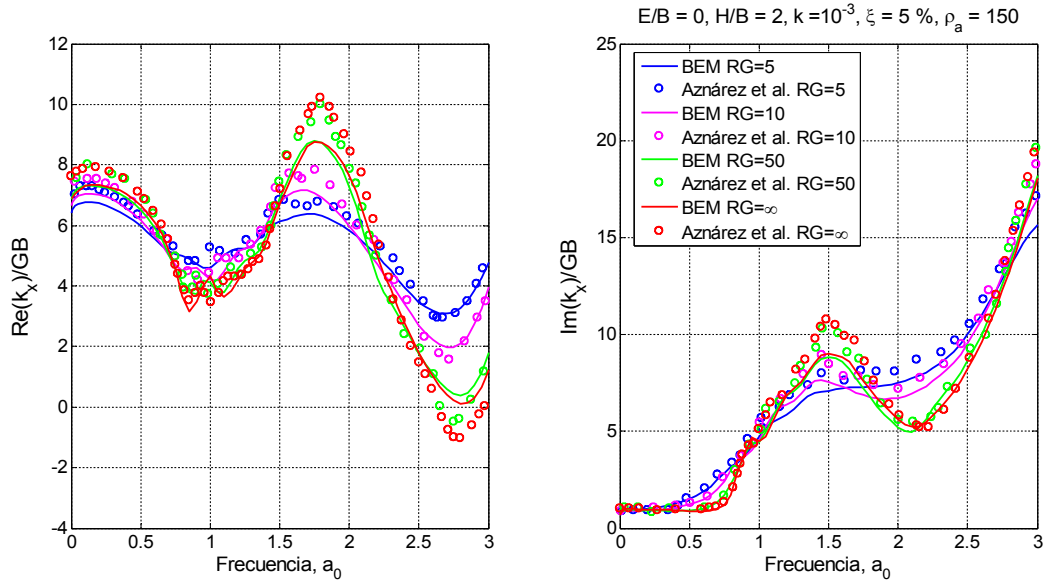


Figura 35: Impedancia horizontal. Comparativa con resultados de Aznárez para cimentación superficial que descansa sobre estrato de rigidez variable.

Respecto de los valores obtenidos, en la parte real, a medida que la relación  $RG$  disminuye, aumenta la diferencia de resultados. Se cumple que los resultados del modelo BEM es siempre menor que la solución de Aznárez, asociando este efecto a la diferencia de densidades de mallado. No obstante, la diferencia es aceptable.

## 6.5 Resultados adicionales obtenidos

Ahora se plantea calcular unos resultados adicionales a los obtenidos en el segundo problema de validación (figura 25). En el documento original no están estas gráficas. Sin embargo, sí que se hacen comentarios respecto a la influencia de la densidad añadida, la constante de disipación y el amortiguamiento. Es probable que estos problemas hayan sido resueltos pero, por falta de espacio, no se hayan añadido al documento. Por tanto, se mantendrán las mismas propiedades excepto  $k$  y  $\rho_a$ . Así, se podrá analizar qué ocurre bajo estas condiciones. Los resultados se muestran a continuación.

### 6.5.1 Influencia de la densidad añadida sobre la impedancia vertical

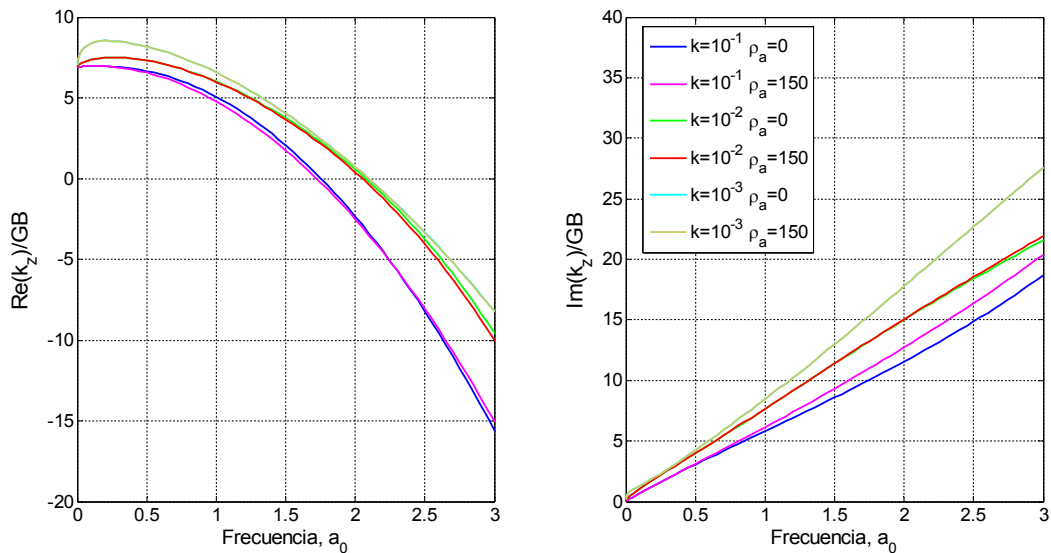


Figura 36: Influencia de la densidad añadida  $\rho_a$  sobre la impedancia vertical. Sin amortiguamiento.

De la lectura de la figura 36 se puede ver que, manteniendo constante  $k$ , hay un cambio poco significativo en la rigidez cuando varía  $\rho_a$ . Así, para  $k = 10^{-1}$ , la diferencia es pequeña y solo apreciable a altas frecuencias, para  $k = 10^{-2}$  la diferencia es menor y, para  $k = 10^{-3}$  prácticamente inapreciable.

En el caso del amortiguamiento, se observa un comportamiento parecido a la rigidez pero más pronunciado. Así, para  $k = 10^{-1}$  y a altas frecuencias, se ve cierta dependencia de  $\rho_a$ . A medida que

$k \rightarrow 0$ , los cambios en  $\rho_a$  afectan en menor medida, siendo prácticamente inapreciable para  $k = 10^{-3}$ .

### 6.5.2 Influencia del amortiguamiento $\xi$ y la constante de disipación $b$ sobre la impedancia vertical

Otros parámetros importantes a estudiar son el amortiguamiento y la constante de disipación. En la figura 37 se han obtenido los resultados para el caso de impedancia vertical. De su lectura se ve que la rigidez tiene cierta dependencia del amortiguamiento a altas frecuencias, manteniendo  $k$  constante. Si se mantiene constante el amortiguamiento, la rigidez se ve fuertemente afectada por la constante de disipación. A medida que la permeabilidad  $k$  disminuye (y por tanto, la constante de disipación aumenta), primero hay una tendencia creciente a bajas frecuencias para luego decrecer rápidamente, siendo mayor la pendiente decreciente cuanto menor es  $k$ .

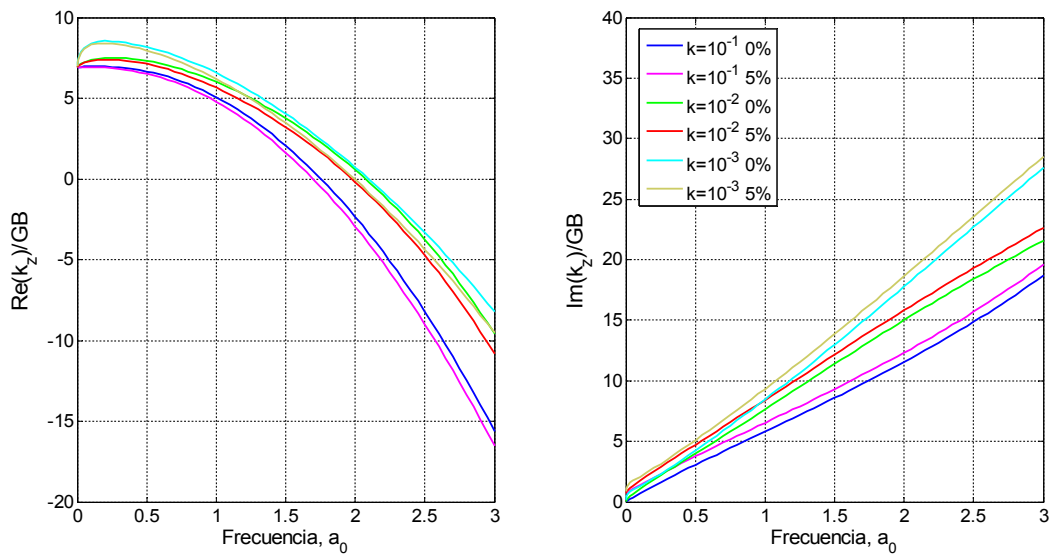


Figura 37: Influencia de la constante de disipación  $b$  y del amortiguamiento  $\xi$  sobre la impedancia vertical.

En la parte imaginaria se observa que el aumento del amortiguamiento supone un aumento de la impedancia, siendo más visible a altas frecuencias. Respecto de la influencia de  $k$ , se ve que hay una dependencia elevada. A medida que  $k$  disminuye, aumenta la pendiente.

### 6.5.3 Influencia del amortiguamiento $\xi$ y la constante de disipación $b$ sobre la impedancia horizontal

Para el caso de impedancia horizontal, en la figura 38 se observa el mismo efecto que en la impedancia vertical, esto es, manteniendo constante  $k$  se observa, en general, un cambio poco significativo en la rigidez. No obstante, se hace más notorio a altas frecuencias. Así, un aumento del amortiguamiento supone una disminución de la rigidez. Respecto de la influencia de  $k$ , es bastante menor que en el caso vertical, siendo más notorio a altas frecuencias pero no habiendo mucha diferencia cuando varía.

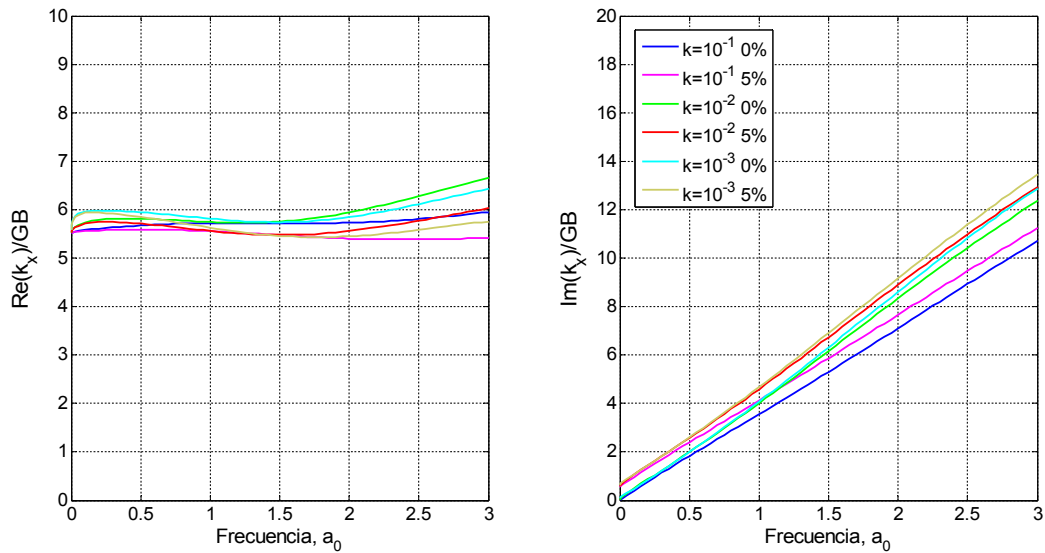


Figura 38: Influencia de la constante de disipación  $b$  y del amortiguamiento  $\xi$  sobre la impedancia horizontal.

En la parte imaginaria se observa que el aumento del amortiguamiento supone un aumento de la impedancia, siendo más visible a altas frecuencias. Además, con una disminución de  $k$  aumenta la pendiente.

### 6.5.4 Influencia del amortiguamiento $\xi$ y la constante de disipación $b$ sobre la impedancia cabeceo

En el último caso (fig. 39, cabeceo), se observa el mismo efecto que en la impedancia vertical y horizontal, esto es, manteniendo constante  $k$  hay, en general, un cambio poco significativo en la rigidez. No obstante, se hace más notorio a altas frecuencias. Así, un

aumento del amortiguamiento supone una disminución de la rigidez.

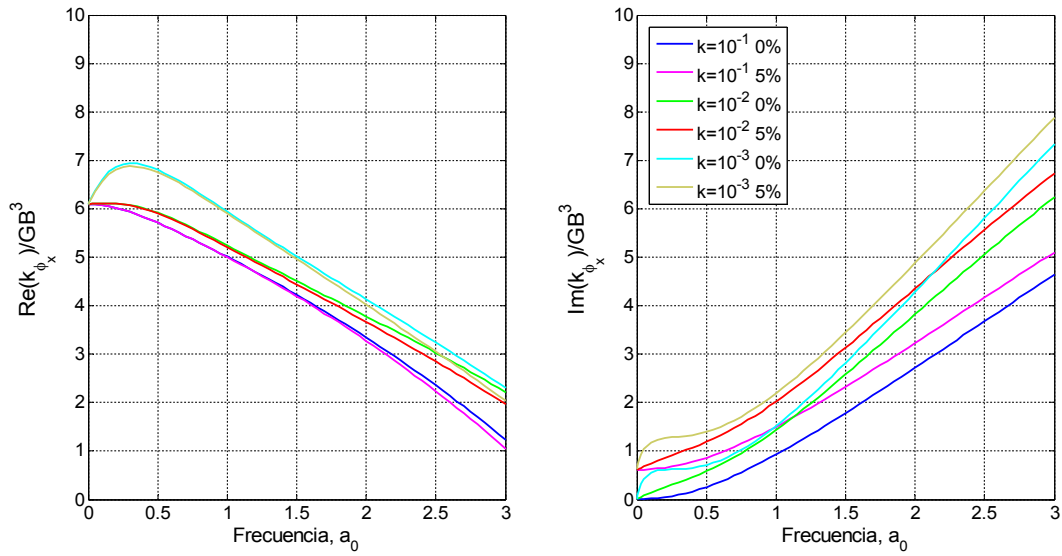


Figura 39: Influencia de la constante de disipación  $b$  y del amortiguamiento  $\xi$  sobre la impedancia de cabeceo.

Por último, en la parte imaginaria, se observa que el aumento del amortiguamiento supone un aumento de la impedancia, siendo más visible a altas frecuencias y que una disminución de la permeabilidad  $k$  supone un aumento de la pendiente.

## 6.6 Conclusiones

En este capítulo se han resuelto una serie de problemas de mayor dificultad que en el capítulo anterior, habiendo planteado la interacción entre terrenos. Se ha podido comprobar que el programa *Multifebe* proporciona resultados excelentes en estas condiciones.

Las diferencias observadas se deben a la cantidad de nodos empleados. Los primeros resultados se obtuvieron cuando la capacidad computacional era bastante reducida. Así, era necesario utilizar mallados poco densos para resolver los problemas en un tiempo razonable. Sin embargo, hoy es posible utilizar mallados con un número muy superior de nodos. De hecho, donde antes se utilizaban unos pocos cientos de nodos, ahora se han empleado varios miles.

Después de comprobar la validez del software se procederá ahora a resolver el problema donde se modelizará una capa freática.



## Capítulo 7

# Impedancias para suelos poroelásticos considerando el nivel freático

### 7.1 Descripción del problema

Vistas las excelentes capacidades del código disponible, se procede a exponer cómo se modelizará el nivel freático. Se considerará, como se ha hecho hasta ahora, una zapata rígida, sin masa, con la geometría de la figura siguiente (fig. 40):

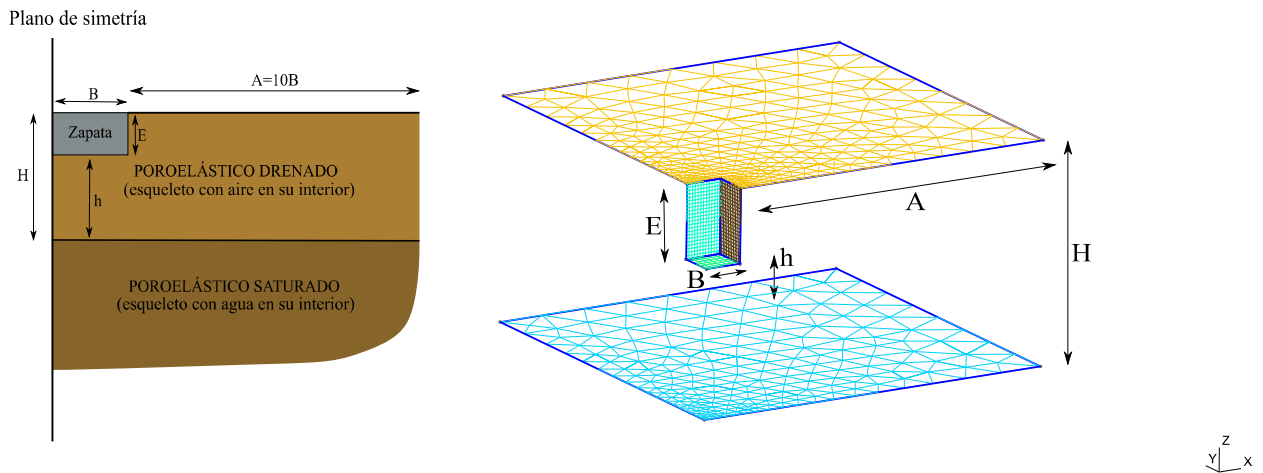


Figura 40: Modelo utilizado para el cálculo de impedancias considerando la capa freática con mallado

Este problema se puede modelizar considerando el terreno superior como viscoelástico con propiedades de esqueleto sólido y el inferior como poroelástico saturado. No obstante, se ha optado por considerar el superior como poroelástico teniendo aire en los poros (se obtienen resultados prácticamente iguales como luego se mostrará para algunos casos resueltos). La diferencia está en los valores de la constante de disipación  $b$ , la densidad del fluido  $\rho_a$  y las constantes de Biot  $Q$  y  $R$ . Si se considera viscoelástico y se traslada a un modelo poroelástico en el que no haya ningún fluido en los intersticios, todos

estos valores son 0. La realidad es que dentro siempre habrá, al menos, aire, pues para que no haya aire habría que realizar un vacío. Si se comparan los cuatro valores comentados, es decir, entre aire y agua, se ve que hay una diferencia enorme. Dicho de otra manera, los valores de las cuatro variables cuando se considera aire son muy bajos o, directamente, 0. Por tanto, muy parecidos a considerar un poroelástico llevado al caso extremo de no tener fluido en sus intersticios, y por tanto, con propiedades de viscoelástico. Dicho lo anterior, los valores de  $Q$  y  $R$  para aire se pueden obtener de manera aproximada como:

$$Q = (1 - \phi) K_f \quad (172)$$

$$R = \phi K_f \quad (173)$$

siendo  $K_f$  el módulo de compresibilidad del aire (en este caso  $K_f = 100.000 \text{ Pa}$ ). Así, las propiedades del terreno superior son (tabla 4):

Propiedades		
	Símbolo	Valor y unidades
Módulo de elasticidad transversal	$G$	$3,2175 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$
Módulo de Poisson	$\nu$	0,25
Densidad del sólido	$\rho_s$	$1.425 \frac{kg}{m^3}$
Densidad del fluido (aire)	$\rho_f$	$1,2 \frac{kg}{m^3}$
Densidad añadida	$\rho_a$	$0 \frac{kg}{m^3}$
Amortiguamiento	$\xi$	0,05
Porosidad	$\phi$	0,35
Constante de Biot (I)	$Q$	$65.000 \frac{N}{m^2}$
Constante de Biot (II)	$R$	$35.000 \frac{N}{m^2}$
Constante de disipación	$b$	$0 \frac{N \cdot s}{m^4}$

*Tabla 4. Propiedades del estrato superior considerado como poroelástico con aire en los poros*

Las propiedades del terreno inferior son (tabla 5):

Propiedades		
	Símbolo	Valor y unidades
Módulo de elasticidad transversal	$G$	$3,2175 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$
Módulo de Poisson	$\nu$	0,25
Densidad del sólido	$\rho_s$	$1.425 \frac{kg}{m^3}$
Densidad del fluido	$\rho_f$	$1.000 \frac{kg}{m^3}$
Densidad añadida	$\rho_a$	$0 \frac{kg}{m^3}$
Amortiguamiento	$\xi$	0,05
Porosidad	$\phi$	0,35
Constante de Biot (I)	$Q$	$4,61 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2}$
Constante de Biot (II)	$R$	$2,4823 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2}$
Constante de disipación	$b$	$1,1986 \cdot 10^7 \frac{N \cdot s}{m^4}$

*Tabla 5. Propiedades del estrato inferior considerado como poroelástico saturado*

## 7.2 Datos adicionales

La densidad de esqueleto sólido es:

$$\rho = \rho_s (1 - \phi) = 1.425 (1 - 0,35) = 926,25 \frac{kg}{m^3} \quad (174)$$

La velocidad de propagación de onda será:

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho_s (1 - \phi)}} = \sqrt{\frac{3,2175 \cdot 10^7}{1.425 (1 - 0,35)}} = 186,3782 \frac{m}{s} \quad (175)$$

La función frecuencia a utilizar será:

$$\omega(a_0) = \frac{c_s}{B} \cdot a_0 = \frac{186,3782}{4} \cdot a_0 = 46,59455 \cdot a_0 \quad (176)$$

Se debe establecer un tamaño máximo de elemento. Será un compromiso entre tiempo de cómputo y precisión. Se establecerá un elemento de tamaño menor en la zona próxima a la zapata y, desde ahí, irá creciendo hasta cubrir toda la superficie libre. En cualquier caso, el tamaño máximo será:

$$tamaño\ máximo = \frac{\lambda}{2} \quad (177)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda. Para obtener  $\lambda$  primero se definirá el período mínimo  $T_{min}$ :

$$T_{min} = \frac{2\pi}{\frac{c_s}{B} \cdot a_0} \quad (178)$$

Operando se obtiene:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} c_s \cdot T_{min} = \frac{1}{2} c_s \frac{2\pi}{\frac{c_s}{B} \cdot a_0} = \pi \frac{B}{a_0} = 4,188\ m \quad (179)$$

### 7.3 Condiciones de contorno

Respecto de la interacción entre terreno superior e inferior será considerada permeable. Además, se considerará soldada.

Respecto de la interacción entre zapata y terreno, se considerará soldada e impermeable.

### 7.4 Relaciones a calcular

Las relaciones a calcular serán:

$$\frac{E}{B} = [0; 0,25; 0,50; 1; 2; 4] \quad (180)$$

$$\frac{h}{B} = [0; 1; 2; 4; 10; \infty] \quad (181)$$

De las relaciones anteriores, teniendo en cuenta que se calcularán los 4 tipos (vertical, horizontal, cabeceo y torsión) y que la zapata es cuadrada, será posible obtener la matriz completa de impedancias. Además, de lo anterior se deduce que se tendrán que calcular 144 curvas.

### 7.5 Impedancias verticales

Las gráficas se han hecho siguiendo siempre los estos mismos criterios. Así, a la izquierda está la rigidez dinámica y a la derecha el amortiguamiento. En el eje de abscisas está la frecuencia adimensional  $a_0$  y, en los verticales, las impedancias normalizadas. La impedancia vertical se ha normalizado con el factor  $GB$ . En la zona superior de cada gráfica se da el grado de embebimiento  $E/B$ . Luego, en las leyendas, se añaden las relaciones  $h/B$  utilizadas para cada curva solución.

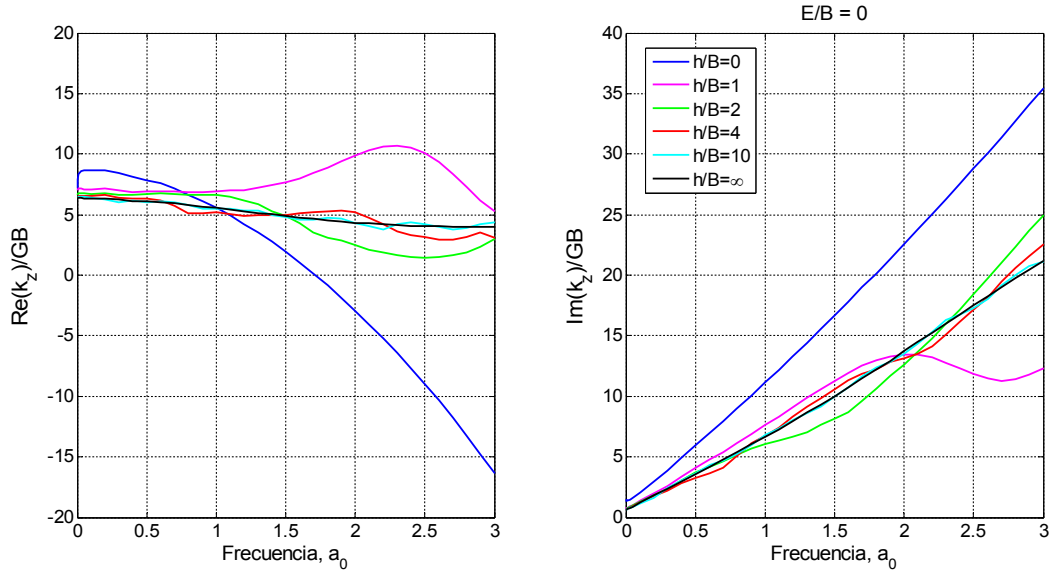


Figura 41: Impedancia vertical. Grado de embebimiento  $E/B = 0$ . Influencia del nivel freático.

La figura 41 representa el caso de una zapata superficial que descansa sobre un estrato poroelástico con aire en los poros de potencia  $H$  variable. El segundo estrato, que está por debajo del anterior, es el poroelástico saturado (agua en los poros sin capacidad de admitir más).

Respecto de los resultados obtenidos, para el caso extremo de  $h/B=0$  (todo poroelástico saturado), se observa que, a altas frecuencias, la rigidez dinámica es negativa y, además, de valor numérico importante. Cuando empieza a haber terreno seco, a altas frecuencias, su valor se reduce de una manera importante. También se ve que las curvas siguen un patrón parecido a una onda, reduciendo

su amplitud a medida que la relación  $h/B$  aumenta, y el camino que siguen es el caso límite, cuando todo el terreno está drenado. Cuando  $h=B$ , se obtienen los valores de rigidez dinámica máximos en valores positivos. Respecto del amortiguamiento, tiene una tendencia parecida a una onda y se aplana en los casos extremos, siendo el mayor en el caso  $h/B=0$  para todos los valores de la frecuencia. Como se verá en las siguientes gráficas, estas tendencias, básicamente, se mantendrán para aumentos del grado de embebimiento  $E/B$ .

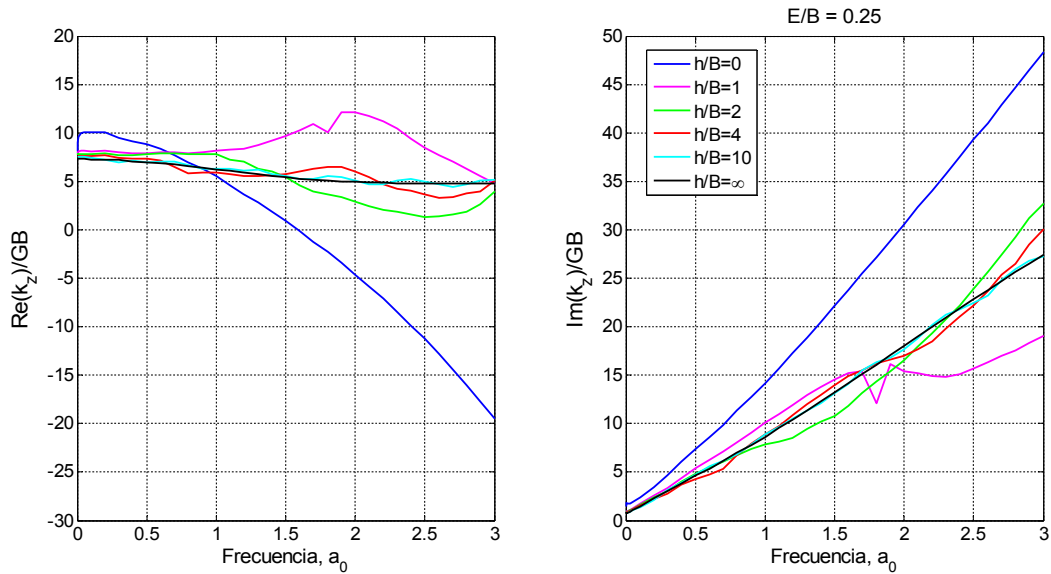


Figura 42: Impedancia vertical. Grado de embebimiento  $E/B = 0,25$ . Influencia del nivel freático.

En la figura 42 se ven algunos saltos en las curvas. Se trata de un error numérico al aplicar el código. Con cambiar ligeramente la densidad del fluido se ha corregido.

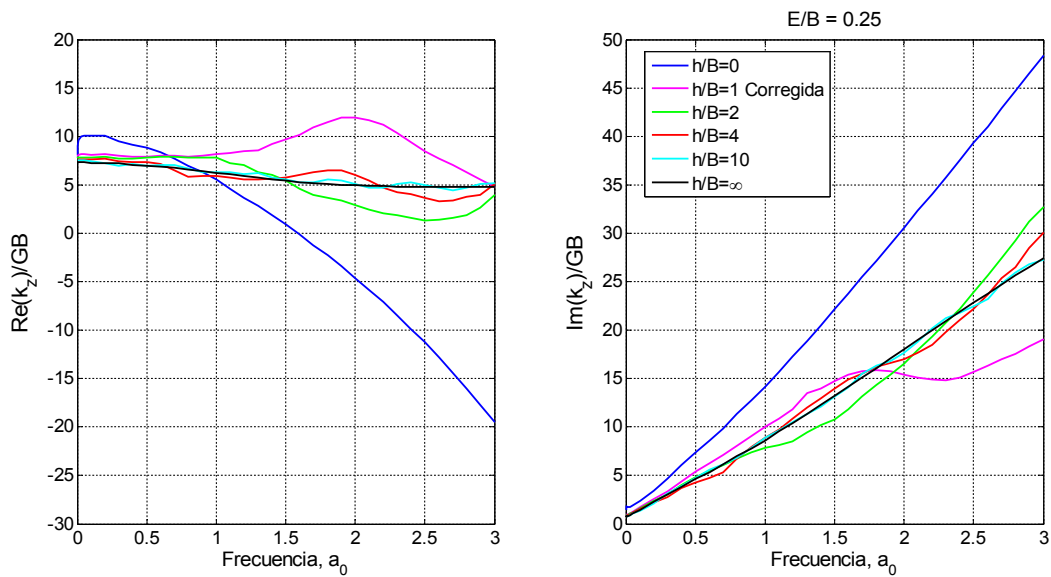


Figura 43: Impedancia vertical. Grado de embebimiento  $E/B = 0,25$ . Influencia del nivel freático. Corrección de resultados.

En otra de las curvas vuelve a producirse un salto (figura 44). Siguiendo el mismo procedimiento anterior se resuelve el problema.

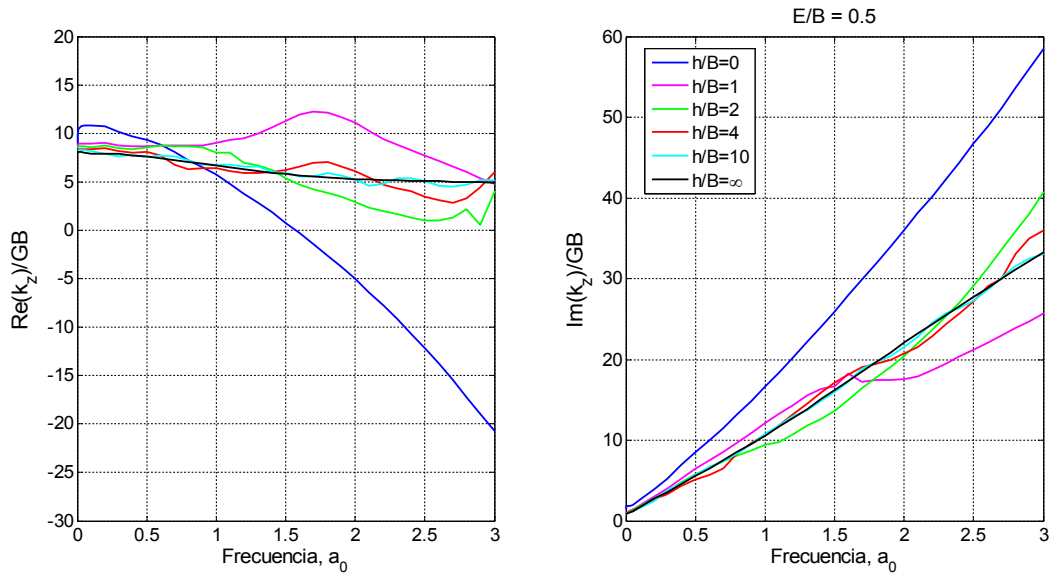


Figura 44: Impedancia vertical. Grado de embebimiento  $E/B = 0,5$ . Influencia del nivel freático.

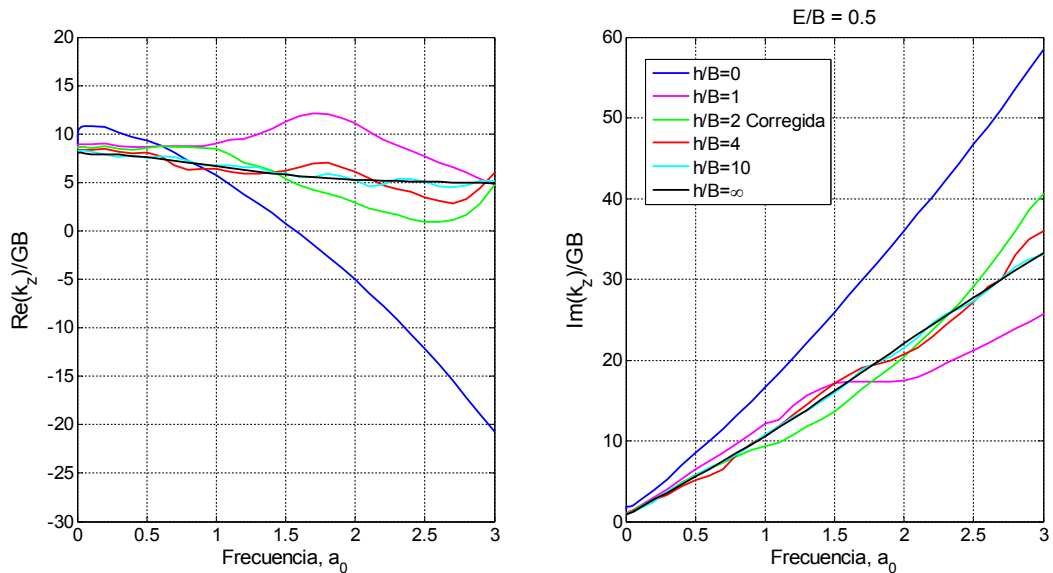


Figura 45: Impedancia vertical. Grado de embebimiento  $E/B = 0,5$ . Influencia del nivel freático. Corrección de resultados.

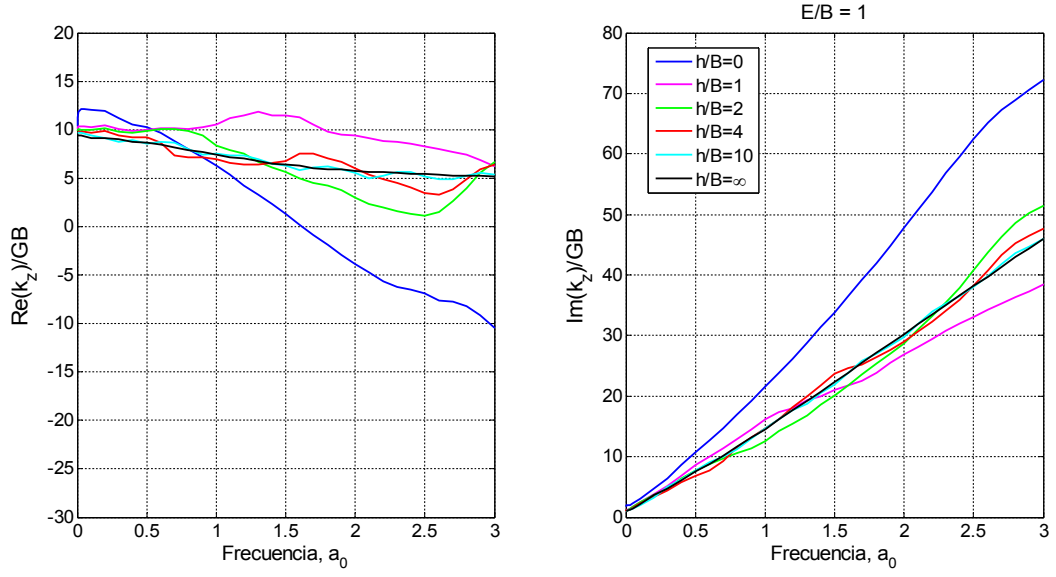


Figura 46: Impedancia vertical. Grado de embebimiento  $E/B = 1$ . Influencia del nivel freático.

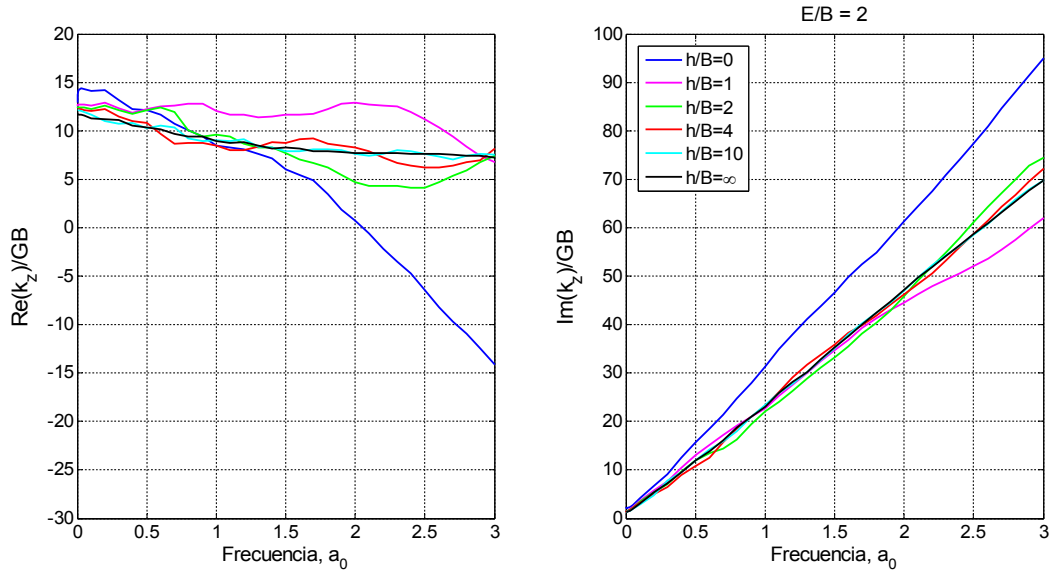


Figura 47: Impedancia vertical. Grado de embebimiento  $E/B = 2$ . Influencia del nivel freático.

Como últimos comentarios a los resultados obtenidos, se ve que, con el aumento del grado de embebimiento  $E/B$ , aumenta tanto la rigidez como el amortiguamiento. Además, también aumenta la tendencia ondulante, apareciendo rizado.



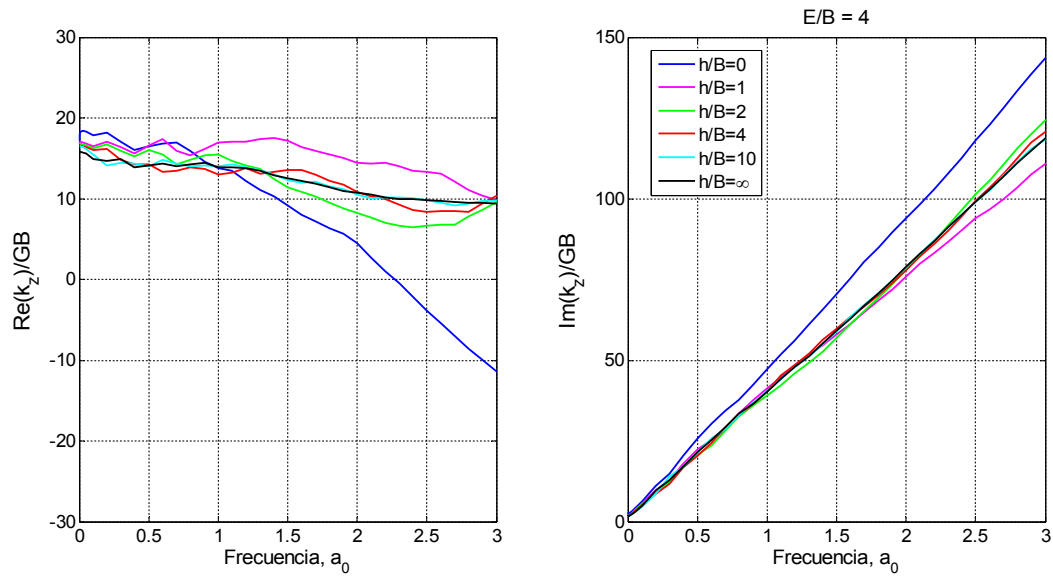


Figura 48: Impedancia vertical. Grado de embebimiento  $E/B = 4$ . Influencia del nivel freático.

## 7.6 Impedancias verticales considerando la región superior como viscoelástica

Por último, anteriormente se comentó que no importa considerar el terreno superior como viscoelástico o poroelástico con aire en su interior. Se mostrarán las tres curvas que presentaron un salto junto con las curvas obtenidas para el mismo problema considerando el terreno superior como viscoelástico con propiedades equivalentes. Esto fue algo que se hizo para comprobar que, efectivamente, los saltos se debían a un problema numérico. Así, el modelo será ahora el siguiente:

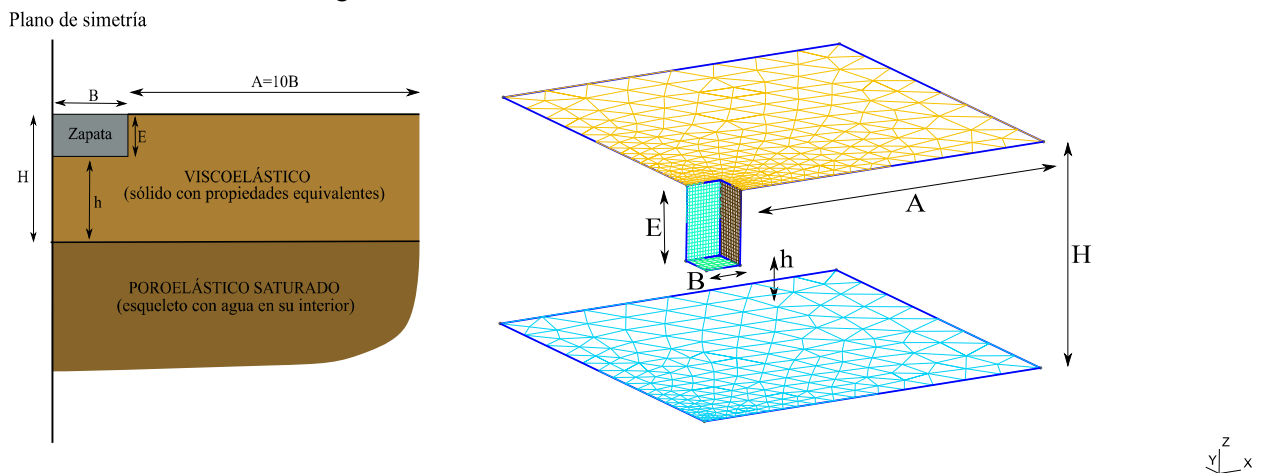


Figura 49: Modelo alternativo para el cálculo de impedancias considerando la capa freática (estrato superior viscoelástico)

Las propiedades del terreno viscoelástico equivalente serán (tabla 6):

Propiedades		
	Símbolo	Valor y unidades
Módulo de elasticidad transversal	$G$	$3,2175 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$
Módulo de Poisson	$\nu$	0,25
Densidad del sólido	$\rho_s$	$926,25 \frac{kg}{m^3}$
Amortiguamiento	$\xi$	0,05

Tabla 6: Propiedades del estrato superior considerado como viscoelástico

Los resultados obtenidos son los siguientes:

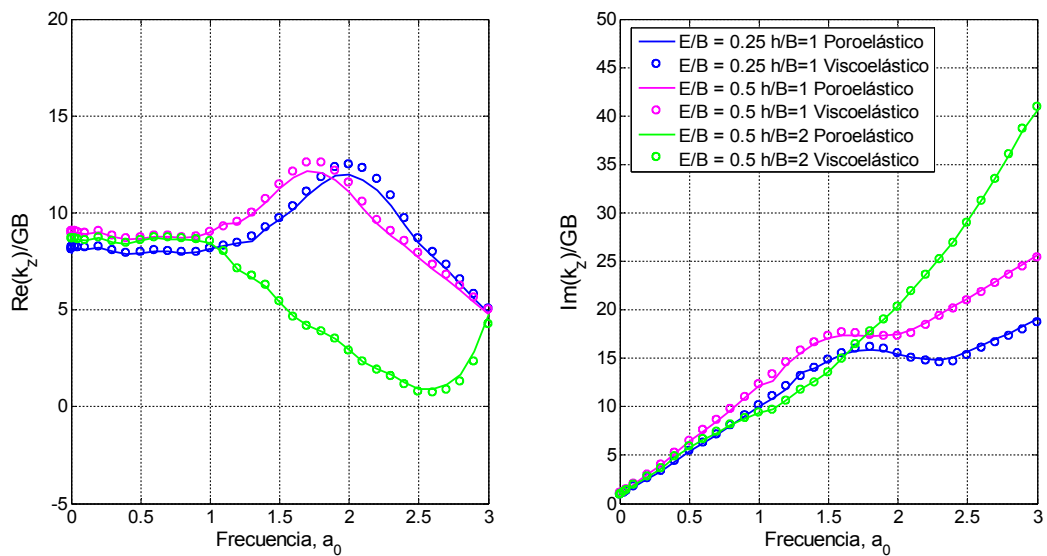


Figura 50: Comparativa de modelos. Poroelástico-aire/Poroelástico-agua vs Viscoelástico/Poroelástico-agua

Se observa que los resultados no difieren mucho al considerar el terreno superior como un medio poroelástico con aire o viscoelástico con propiedades de esqueleto sólido. Por tanto, ambos modelos son equivalentes, como era de esperar.

## 7.7 Impedancias horizontales

Las figuras desde la 51 hasta la 56 representan las impedancias horizontales obtenidas para distintos grados de embebimiento y grado de profundidad del nivel freático respecto del contorno inferior de la zapata. Su lectura no difiere de la impedancia vertical.

Leyendo primero la figura 51, para el caso extremo de  $h/B=0$  (todo poroelástico saturado), se observa que la rigidez dinámica adquiere los valores máximos para todas las frecuencias. Cuando empieza a haber terreno seco, se ve que las curvas siguen un patrón parecido a una onda, reduciendo su amplitud a medida que la relación  $h/B$  aumenta. El camino que siguen es el caso límite donde todo el terreno es semiespacio poroelástico drenado. Respecto del amortiguamiento, tiene una tendencia casi plana y creciente, obteniendo los mayores valores en el caso  $h/B=0$  para todos los valores de la frecuencia. Como se verá en las siguientes gráficas (figuras 52 a 56), la tendencia es parecida, pero con aumentos de la rigidez y el amortiguamiento con aumentos del grado de embebimiento.

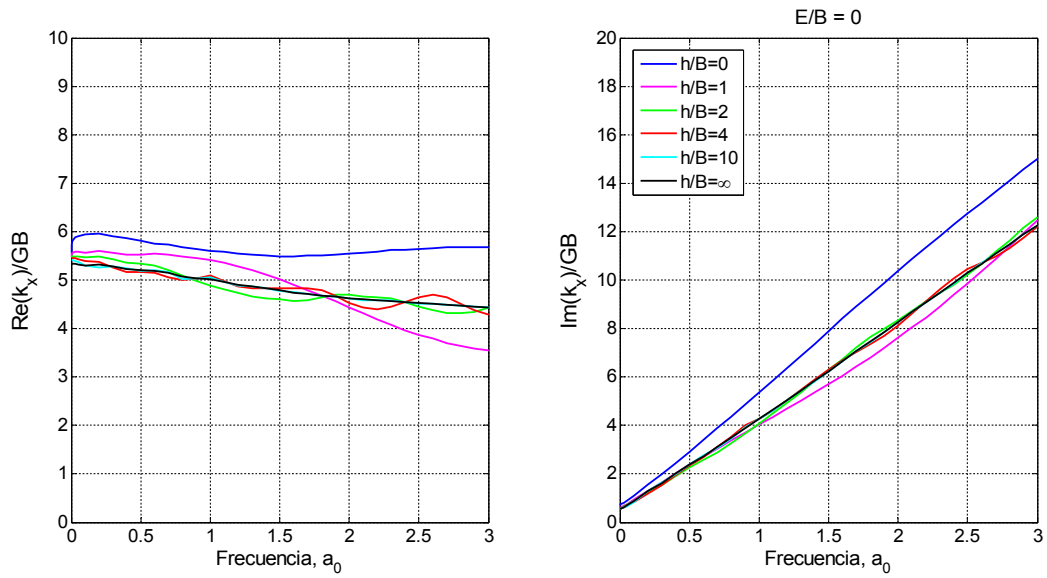


Figura 51: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento  $E/B = 0$ . Influencia del nivel freático.

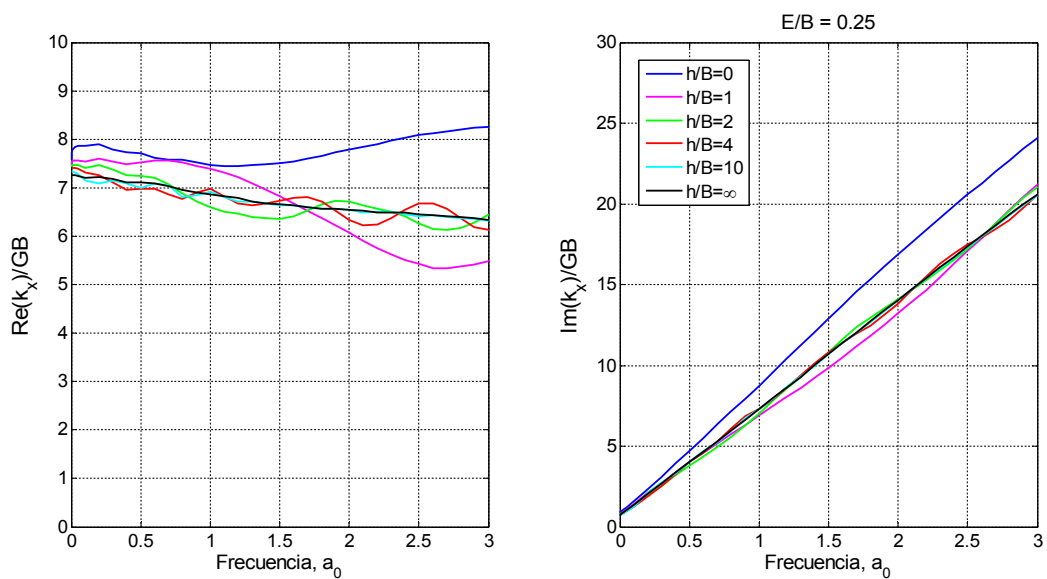


Figura 52: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento  $E/B = 0.25$ . Influencia del nivel freático.

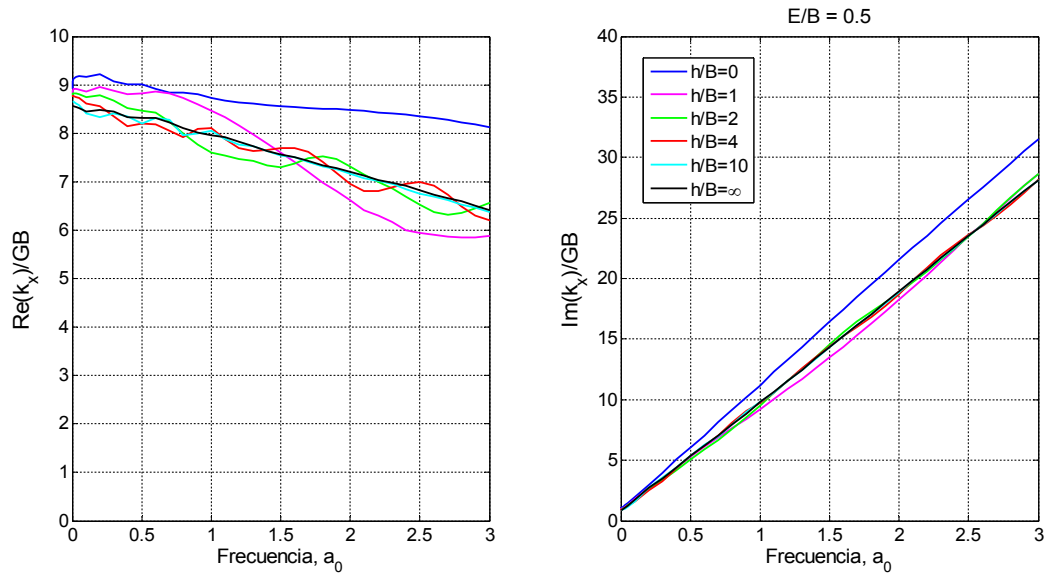


Figura 53: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento  $E/B = 0.5$ . Influencia del nivel freático.

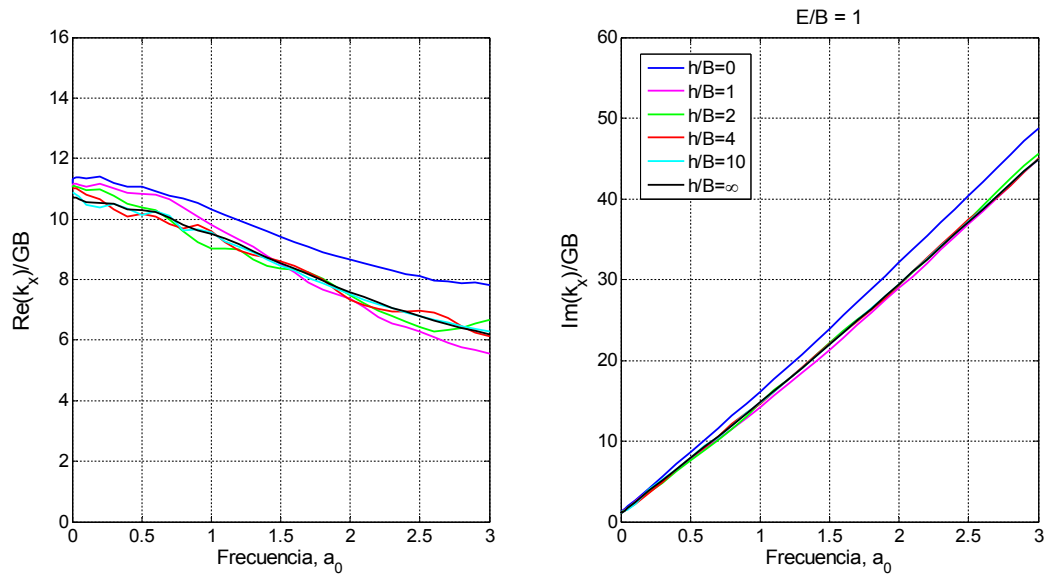


Figura 54: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento  $E/B = 1$ . Influencia del nivel freático.

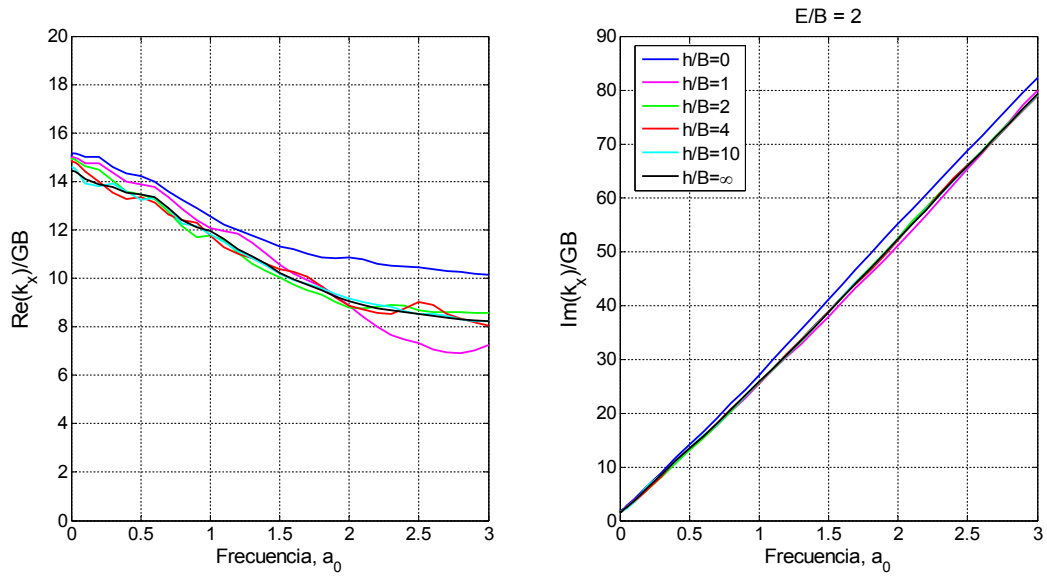


Figura 55: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento  $E/B = 2$ . Influencia del nivel freático.

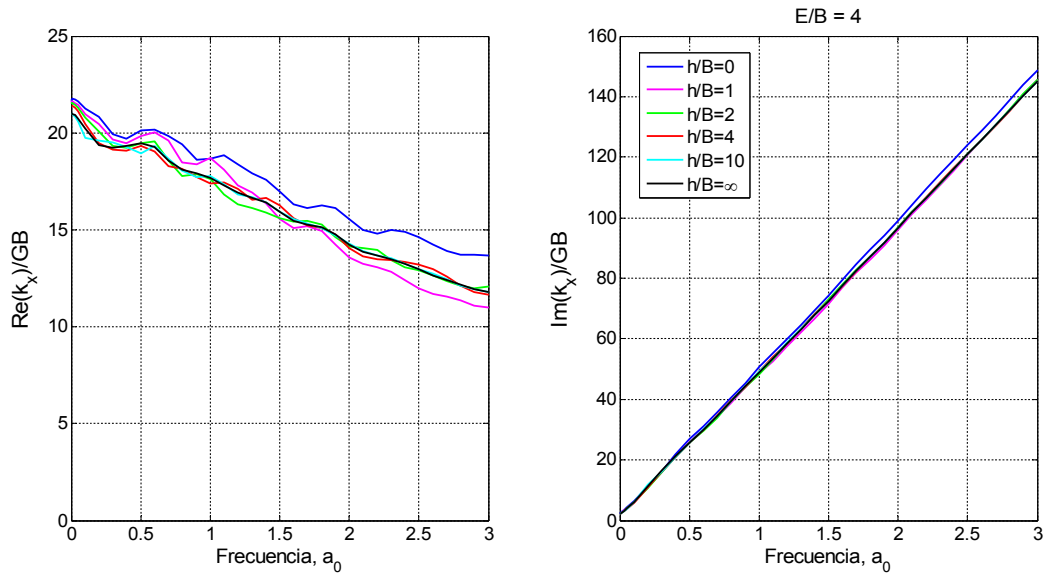


Figura 56: Impedancia horizontal. Grado de embebimiento  $E/B = 4$ . Influencia del nivel freático.

Al igual que en el caso vertical, aparece un rizado en la rigidez que se hace más visible con el aumento de  $E/B$  y, también con el aumento de  $E/B$ , se ve que las diferencias entre curvas se hace más pequeña.

## 7.8 Impedancias de cabeceo

Procediendo a la lectura de resultados de impedancia de cabeceo, las gráficas tienen un solo cambio, esto es, que el factor de normalización será ahora de  $GB^3$ . Por lo demás, se mantiene todo igual.

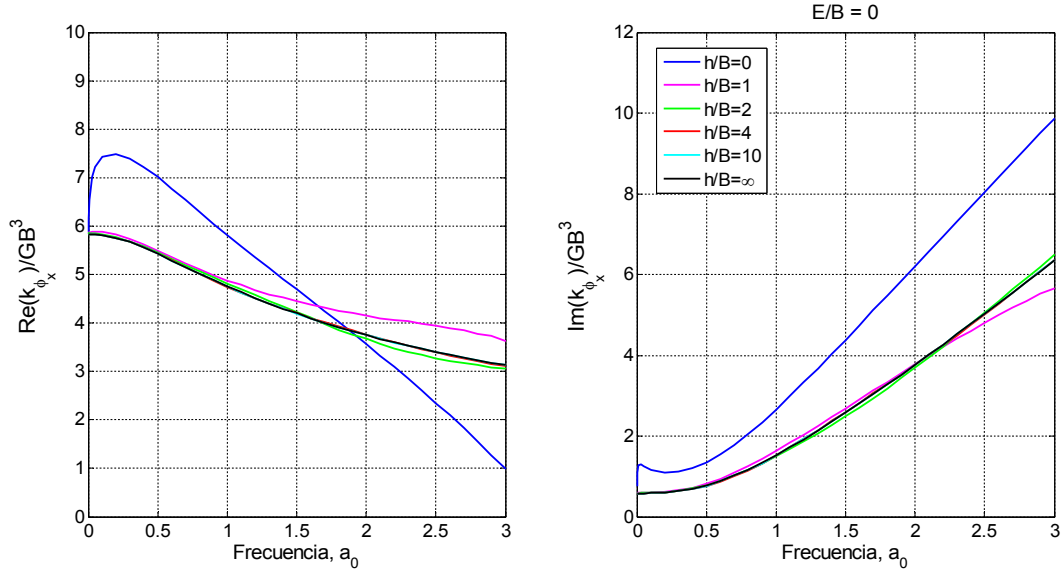


Figura 57: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento  $E/B = 0$ . Influencia del nivel freático.

Observando la figura 57, para el caso extremo de  $h/B=0$  (todo poroelástico saturado), se observa que la rigidez dinámica adquiere los valores máximos y positivos (este efecto es especialmente pronunciado cuando la constante de disipación es elevada). Cuando empieza a haber terreno seco, hay una caída importante, teniendo, prácticamente, el mismo comportamiento desde  $h/B=2$  hasta  $h/B=\infty$ .

Respecto del amortiguamiento, tiene una tendencia casi plana y creciente y, a medida que crece el enterramiento, se ve que la profundidad del nivel freático no tiene influencia en los resultados.

En las siguientes figuras (desde 58 hasta 62) se ve un comportamiento parecido al descrito aquí, con los únicos cambios del aumento de impedancia con el aumento de  $E/B$  y la aparición también del rizado en la rigidez dinámica.

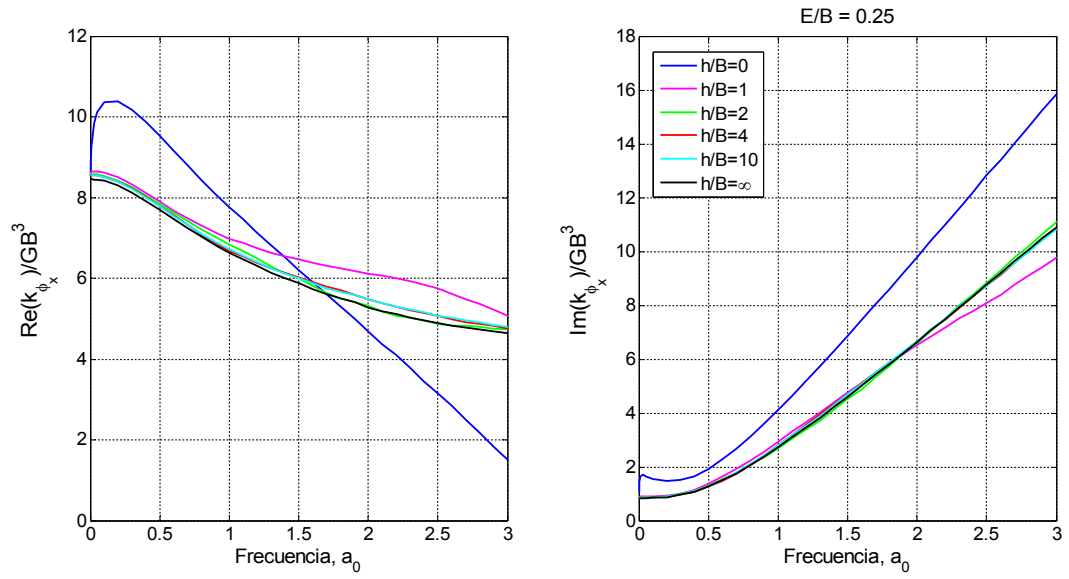


Figura 58: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento  $E/B = 0,25$ . Influencia del nivel freático.

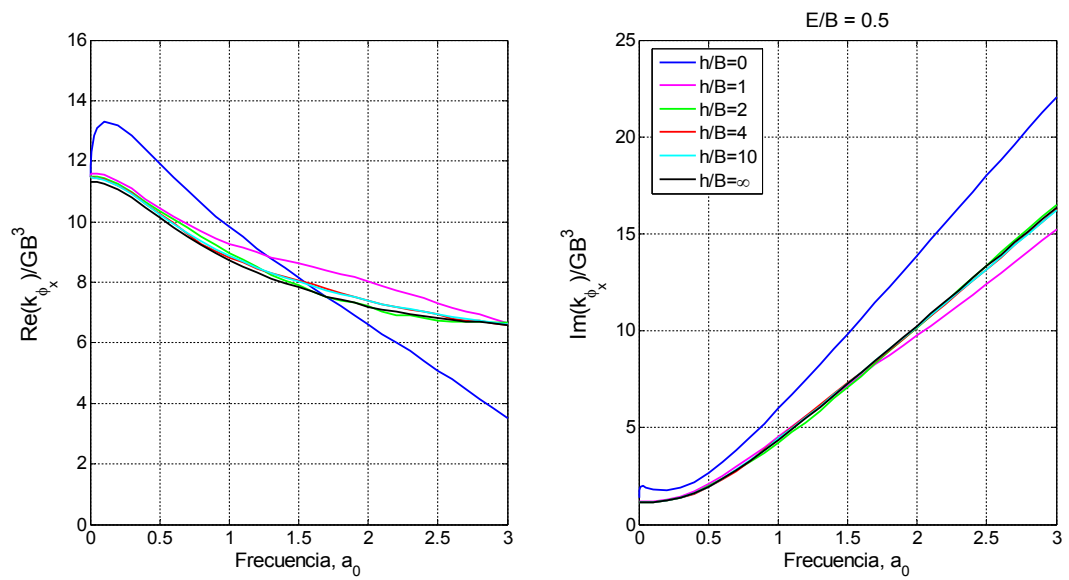


Figura 59: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento  $E/B = 0,5$ . Influencia del nivel freático.

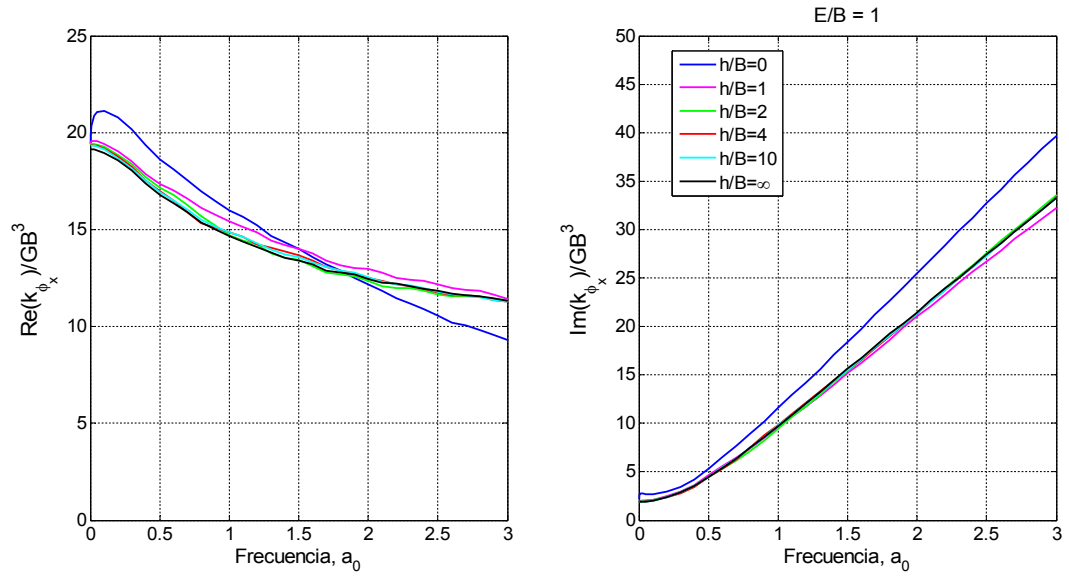


Figura 60: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento  $E/B = 1$ . Influencia del nivel freático.

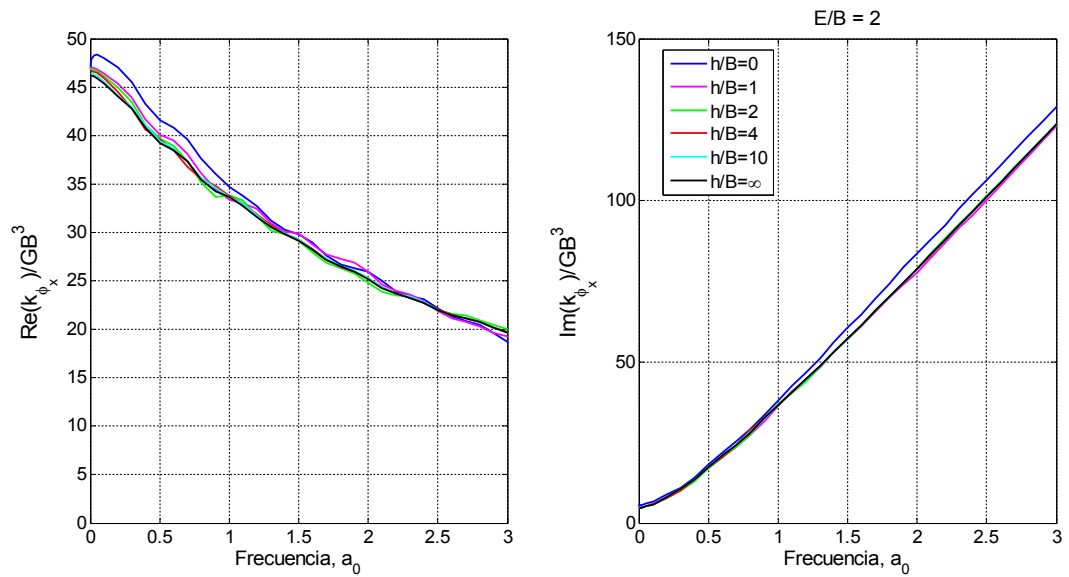


Figura 61: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento  $E/B = 2$ . Influencia del nivel freático.



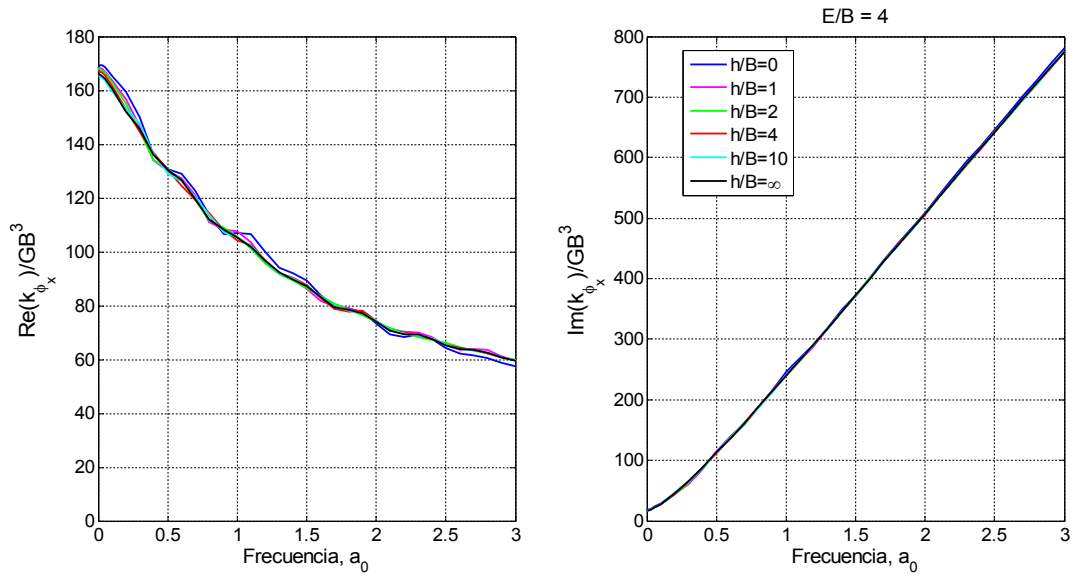


Figura 62: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento  $E/B = 4$ . Influencia del nivel freático.

Se ve que, a medida que aumenta el grado de embebimiento, la influencia del grado de profundidad del nivel freático se hace menor, siendo muy pequeña en la rigidez y, prácticamente, inapreciable en el amortiguamiento.

## 7.9 Impedancias de torsión

Por último, se procede a la lectura de resultados de impedancia de torsión. Las figuras que representan las impedancias de torsión van desde la 63 hasta la 68.

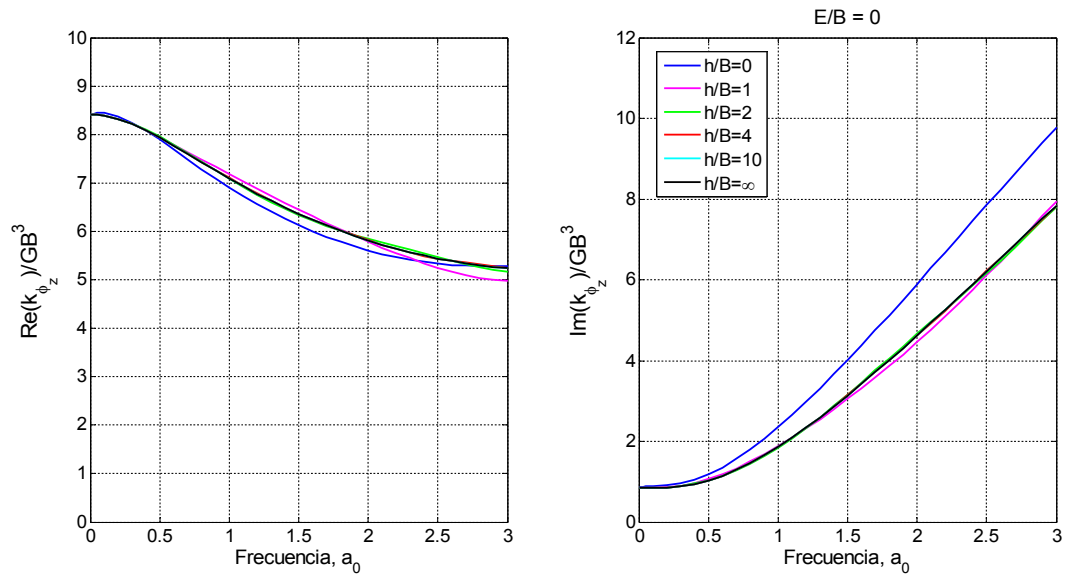


Figura 63: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento  $E/B = 0$ . Influencia del nivel freático.

La principal conclusión que se saca de la lectura de resultados es que el nivel freático tiene poco efecto sobre las impedancias de torsión. Como se ve en las gráficas, para una misma relación  $E/B$ , se obtienen seis curvas casi iguales. El rizado que se observaba antes, ahora no se ve. Respecto del amortiguamiento, tiene una tendencia casi plana y creciente y, a medida que crece el enterramiento, se ve que la profundidad del nivel freático no tiene influencia en los resultados. Respecto de la influencia del grado de embebimiento  $E/B$ , solo se ve un aumento del valor de las impedancias, pero la tendencia es la misma y, prácticamente, sin ninguna influencia cuando cambia la profundidad del nivel freático.

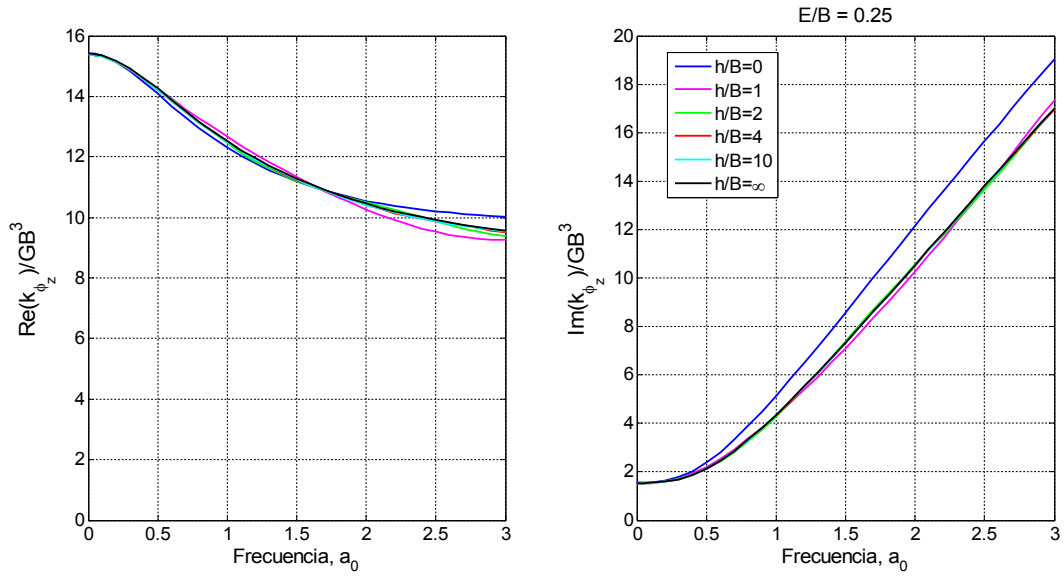


Figura 64: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento  $E/B = 0,25$ . Influencia del nivel freático.

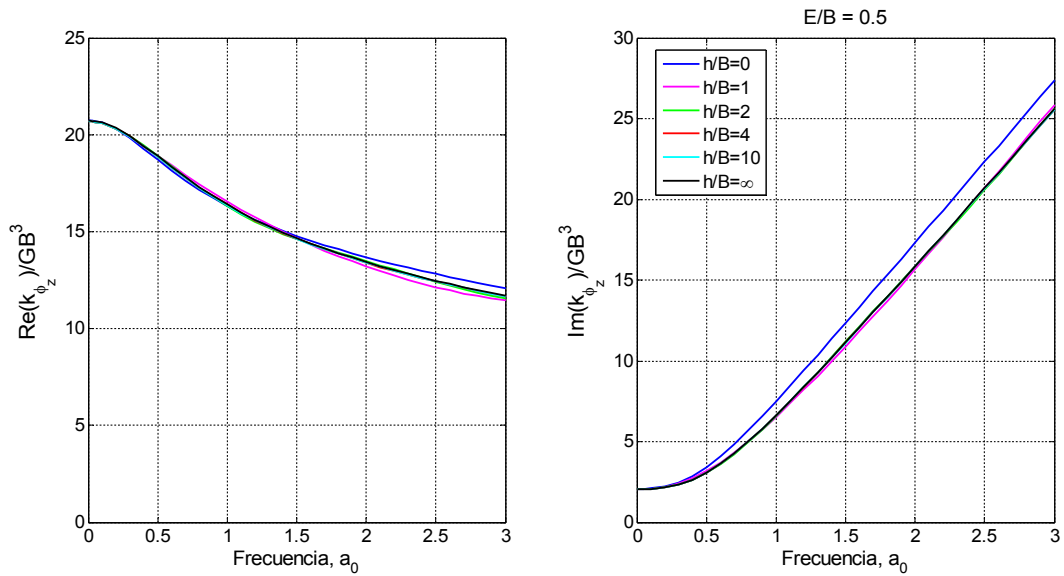


Figura 65: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento  $E/B = 0,5$ . Influencia del nivel freático.

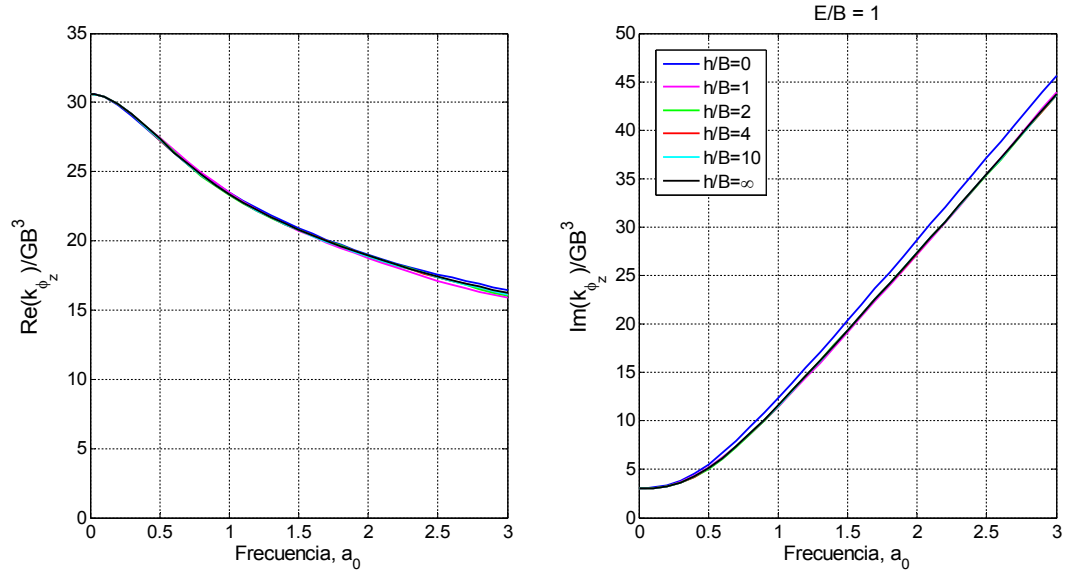


Figura 66: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento  $E/B = 1$ . Influencia del nivel freático.

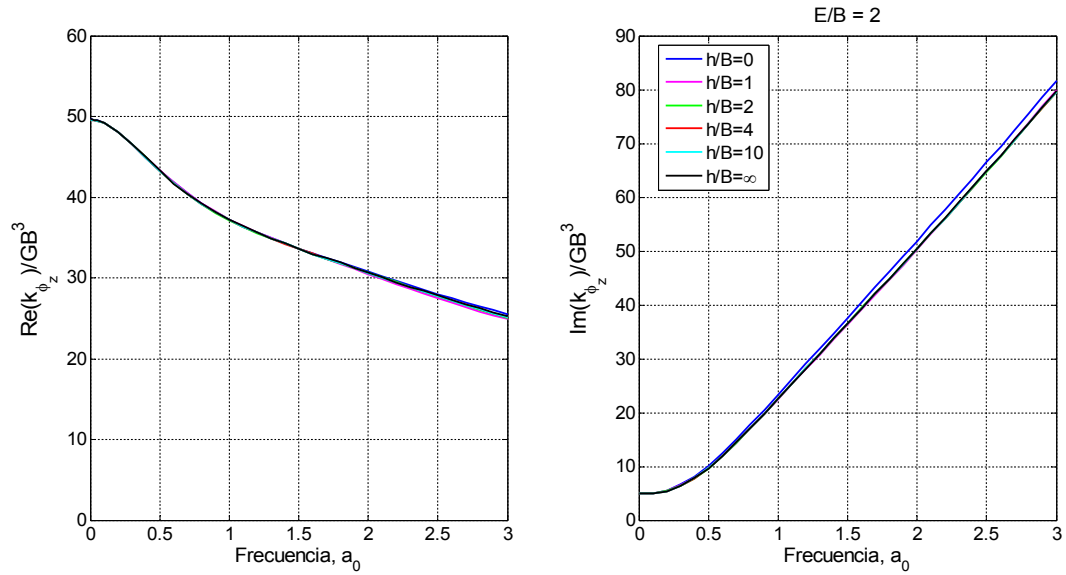


Figura 67: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento  $E/B = 2$ . Influencia del nivel freático.

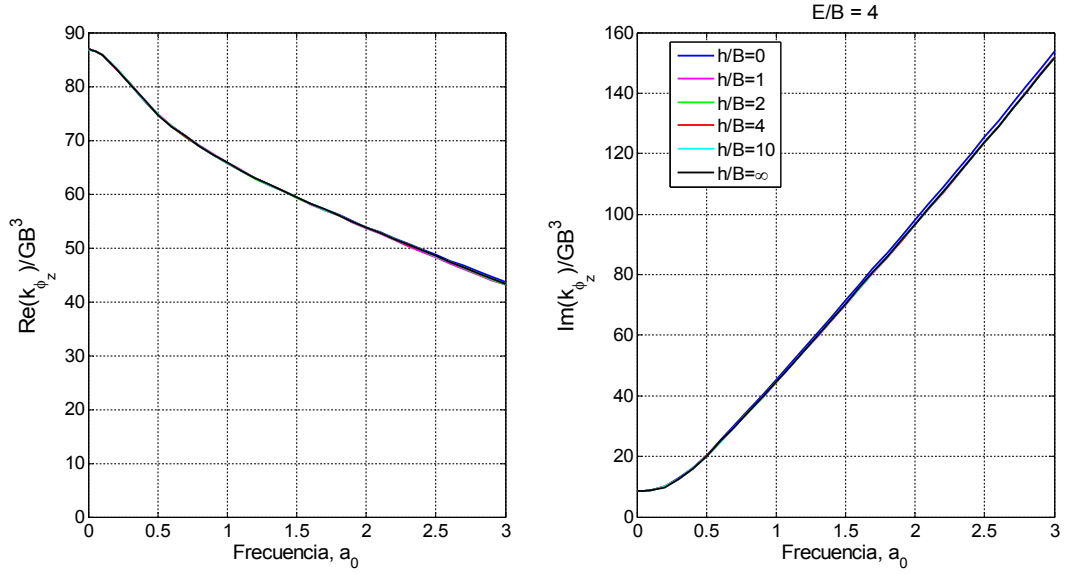


Figura 68: Impedancia de torsión. Grado de embebimiento  $E/B = 4$ . Influencia del nivel freático.

## 7.10 Consideraciones adicionales sobre resultados obtenidos

Una manera de comprobar si los resultados obtenidos son coherentes es comprobar que el valor de la impedancia estática converge a un solo valor para distintas curvas solución. Así, existen fórmulas obtenidas mediante ajuste numérico para comprobar que el valor obtenido es válido.

En este TFM se ha comprobado en impedancia vertical y cabeceo para zapata superficial. Los resultados obtenidos son los siguientes para impedancia vertical:

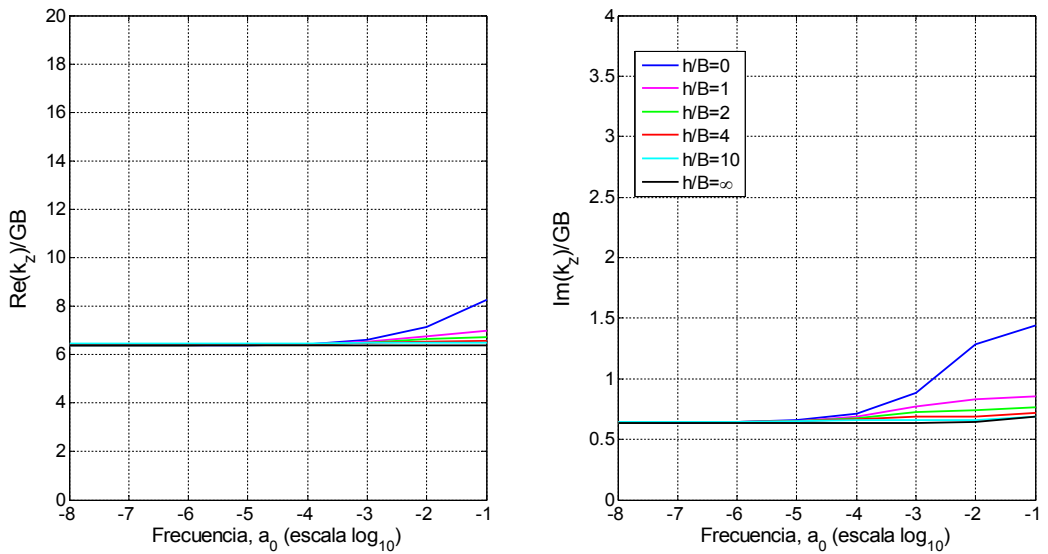


Figura 69: Impedancia vertical. Grado de embebimiento  $E/B = 0$ . Cálculo a bajas frecuencias.

La fórmula que propone Domínguez en impedancia vertical para elementos cuadráticos es:

$$k_z = \frac{4,75}{1-\nu} \cdot GB \cdot \left[ 1 + 0,47 \frac{E}{B} - 0,05 \left( \frac{E}{B} \right)^2 \right] \quad (182)$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{E}{B} = 0$  y que se están utilizando valores normalizados se llega a :

$$k_z = \frac{4,75}{1-0,25} \approx 6,34 \quad (183)$$

Se trata de un valor muy próximo al esperado.

Para el caso de cabeceo se obtiene:

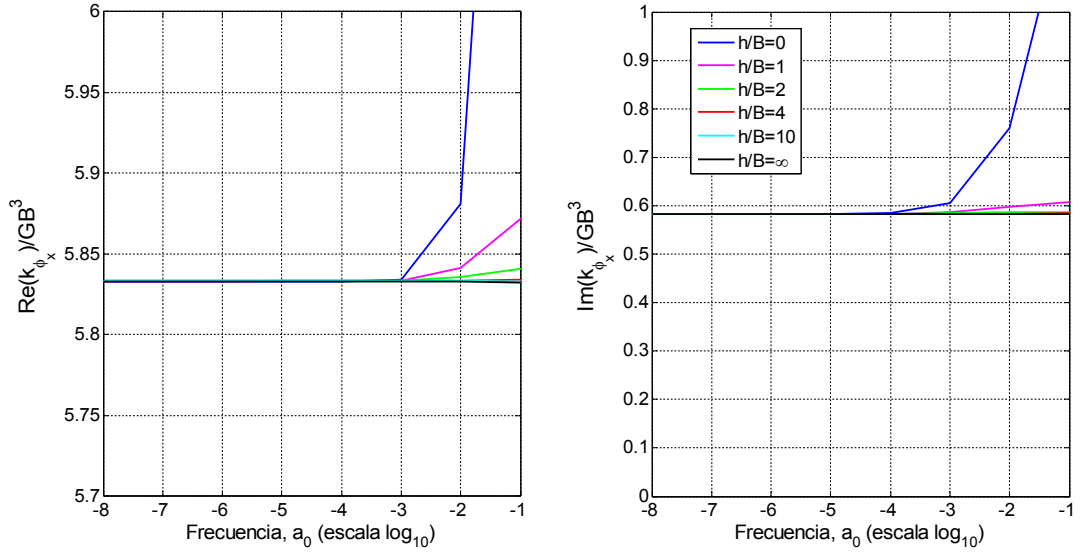


Figura 70: Impedancia de cabeceo. Grado de embebimiento  $E/B = 0$ . Cálculo a bajas frecuencias.

La fórmula que propone Domínguez en impedancia de cabeceo para elementos cuadráticos es:

$$k_\phi = \frac{4,38}{1-\nu} \cdot GB^3 \cdot \left[ 1 + 0,98 \frac{E}{B} + 1,13 \left( \frac{E}{B} \right)^2 \right] \quad (184)$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{E}{B} = 0$  y que se están utilizando valores normalizados se llega a :

$$k_\phi = \frac{4,38}{1-0,25} \approx 5,84 \quad (185)$$

También muy próximo. Por tanto, los resultados obtenidos son coherentes a lo esperado.

## 7.11 Conclusiones

Después de la lectura de las gráficas se pueden extraer algunas conclusiones. En primer lugar, se concluye que el enterramiento tiene un efecto importante en los resultados. A medida que crece, crecen las impedancias y se produce un rizado en las curvas. Este efecto de rizado es más pronunciado en impedancia vertical y horizontal, en menor medida en cabeceo y, prácticamente, inexistente en torsión.

También se ve que, a medida que aumenta el grado de profundidad del nivel freático, se produce un aplanamiento de las curvas. En el caso límite  $h/B=0$ , el nivel freático tiene un efecto muy importante en impedancia de cabeceo a bajas frecuencias, y, dado que la constante de disipación utilizada en este TFM es elevada, se disminuye este efecto drásticamente con un leve incremento del grado de profundidad del nivel. En el caso de impedancias vertical y horizontal, dado el efecto rizado que se produce con el aumento del enterramiento, los valores fluctúan. No obstante, se puede concluir que con el aumento del nivel, disminuye la rigidez dinámica y el amortiguamiento y presentan una dependencia importante de ese factor. Por último, en el caso de torsión, se observa una dependencia prácticamente inexistente.

## Capítulo 8

# Fidelidad de los modelos de suelo viscoelástico drenado-no drenado equivalentes

### 8.1 Descripción del problema

En este capítulo se resolverá una muestra de los problemas resueltos en el capítulo anterior pero considerando otro modelo que, en teoría, debe ser equivalente. Gráficamente, el modelo a comparar es el de la figura 71:

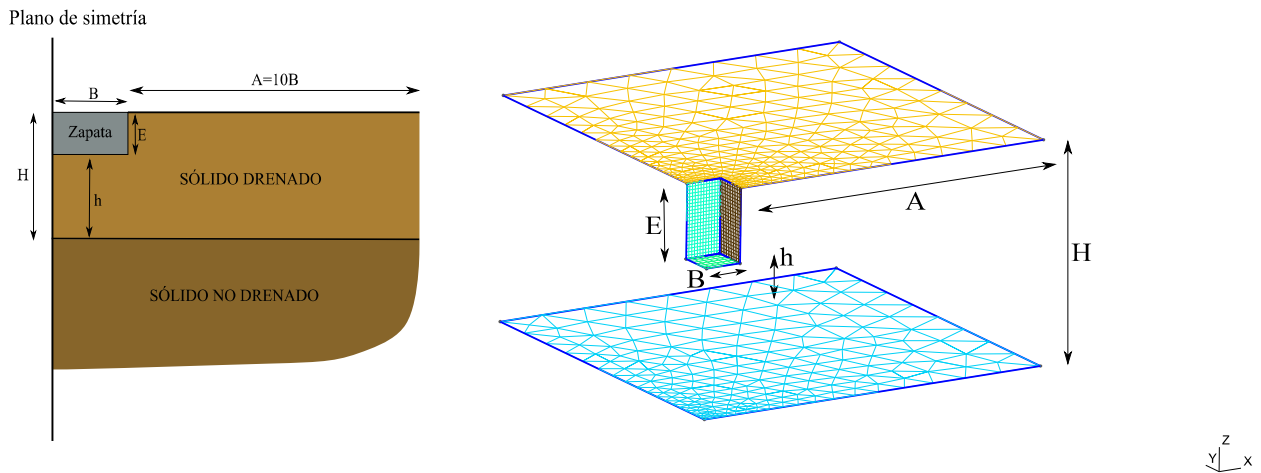


Figura 71: Modelo alternativo sólido drenado/no drenado para el cálculo de impedancias considerando la capa freática

Se trata de una zapata que podrá ser superficial o embebida. Habrá un estrato de potencia  $H$  y otra región inferior. El terreno superior se modelizará como viscoelástico con propiedades de esqueleto sólido de su poroelástico equivalente. El inferior se modelizará como viscoelástico con propiedades de sólido no drenado de su poroelástico equivalente. La superficie libre se ha mallado con elementos triangulares habiendo una mayor cantidad en la zona próxima a la cimentación. La superficie ocupada por la zapata se ha mallado con elementos cuadrangulares. En todos los casos

son elementos de segundo orden.

Las propiedades de la región superior son:

Propiedades		
	Símbolo	Valor y unidades
Módulo de elasticidad transversal	$G_{sd}$	$3,2175 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$
Módulo de Poisson	$\nu_{sd}$	0,25
Densidad del sólido drenado	$\rho_{sd}$	$926,25 \frac{kg}{m^3}$
Amortiguamiento	$\xi_{sd}$	0,05

*Tabla 7: Propiedades del estrato superior (sólido drenado/viscoelástico equivalente)*

Para el inferior se mantienen las mismas propiedades excepto la densidad (pues tiene agua en lugar de aire) y el módulo de Poisson cuyo valor será:

$$\nu_{snd} = \frac{\lambda + \frac{(Q+R)^2}{R}}{2 \cdot [\lambda + G + \frac{(Q+R)^2}{R}]} \quad (186)$$

donde  $\lambda$  es el coeficiente de Lamé. Sustituyendo se obtiene:

$$\nu_{snd} = 0,49230528 \quad (187)$$

Por tanto, la tabla de propiedades será (tabla 8):

Propiedades		
	Símbolo	Valor y unidades
Módulo de elasticidad transversal	$G_{snd}$	$3,2175 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$
Módulo de Poisson	$\nu_{snd}$	0,49230528
Densidad del sólido no drenado	$\rho_{snd}$	$1.276,25 \frac{kg}{m^3}$
Amortiguamiento	$\xi_{snd}$	0,05

*Tabla 8: Propiedades del estrato inferior (sólido no drenado/viscoelástico equivalente)*



## 8.2 Consideraciones adicionales

Para este capítulo, no se repetirán todas las curvas. Será suficiente considerar una muestra representativa. Para ello se escogerán curvas que presenten ondulaciones, comportamientos que se repitan poco o que su valor numérico sea bastante diferente de otras relaciones  $E/B$ .

## 8.3 Impedancias verticales

Para la lectura de las gráficas, se mantienen los mismos criterios anteriores. En las leyendas se añade el término “Drenado-no drenado” el cual se refiere al modelo que utiliza en las regiones características de medio viscoelástico. Si no se dice nada es su equivalente poroelástico. Así, los resultados obtenidos se muestran en las siguientes figuras:

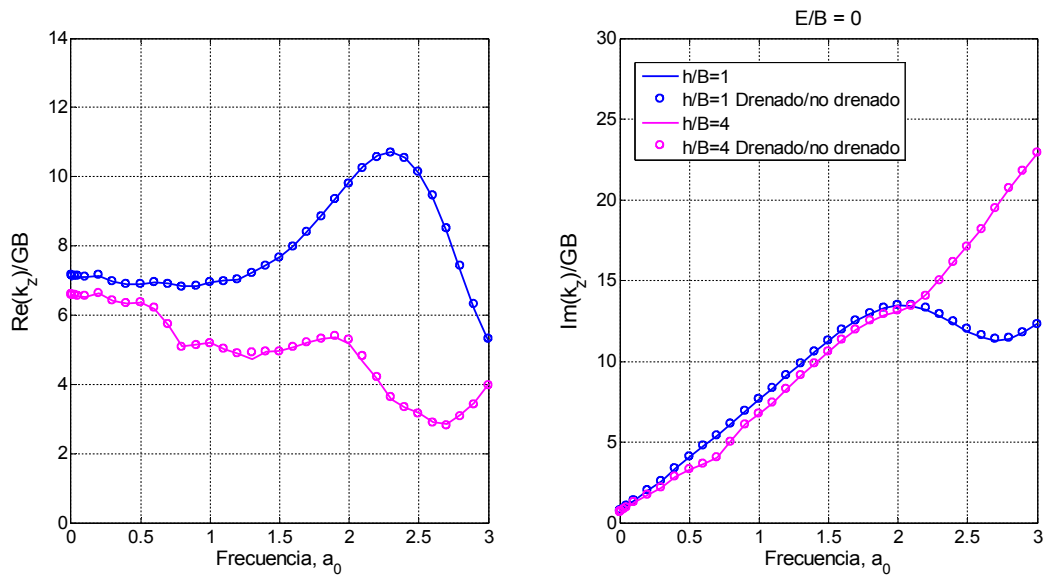


Figura 72: Impedancia vertical. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado.  
Grado de embebimiento  $E/B = 0$

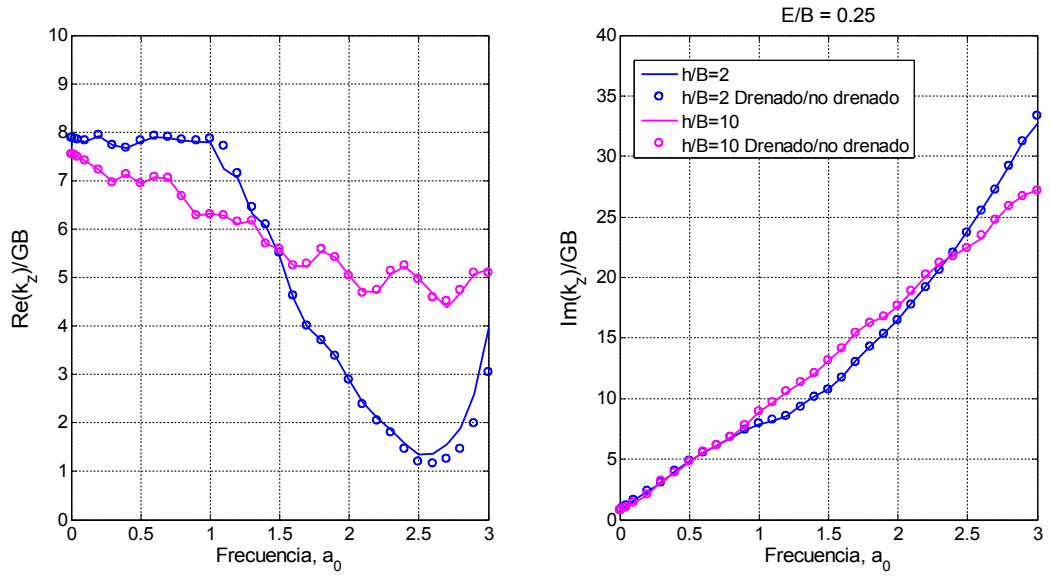


Figura 73: Impedancia vertical. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado.  
Grado de embebimiento  $E/B = 0,25$

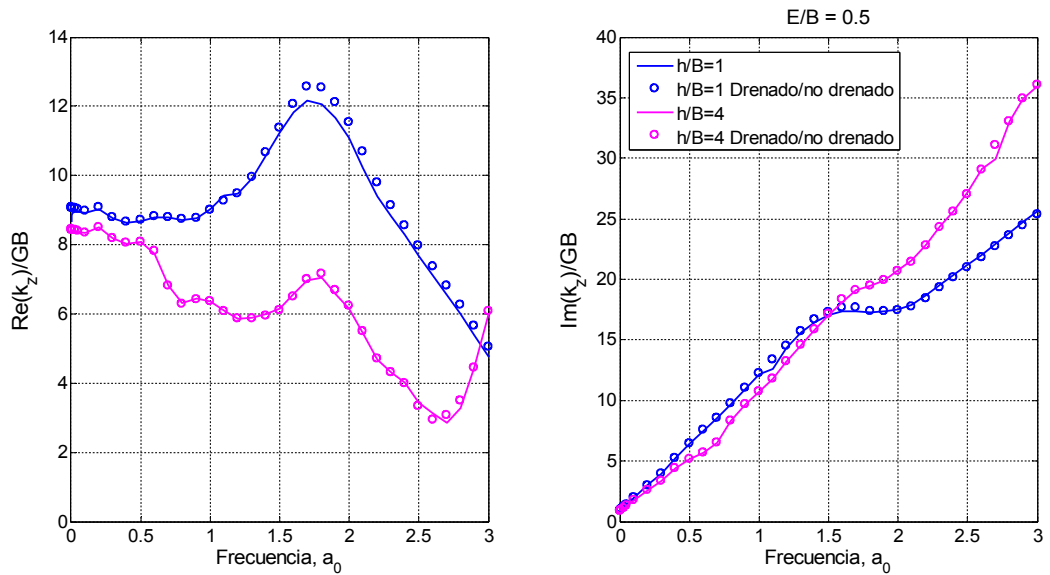


Figura 74: Impedancia vertical. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado.  
Grado de embebimiento  $E/B = 0,5$

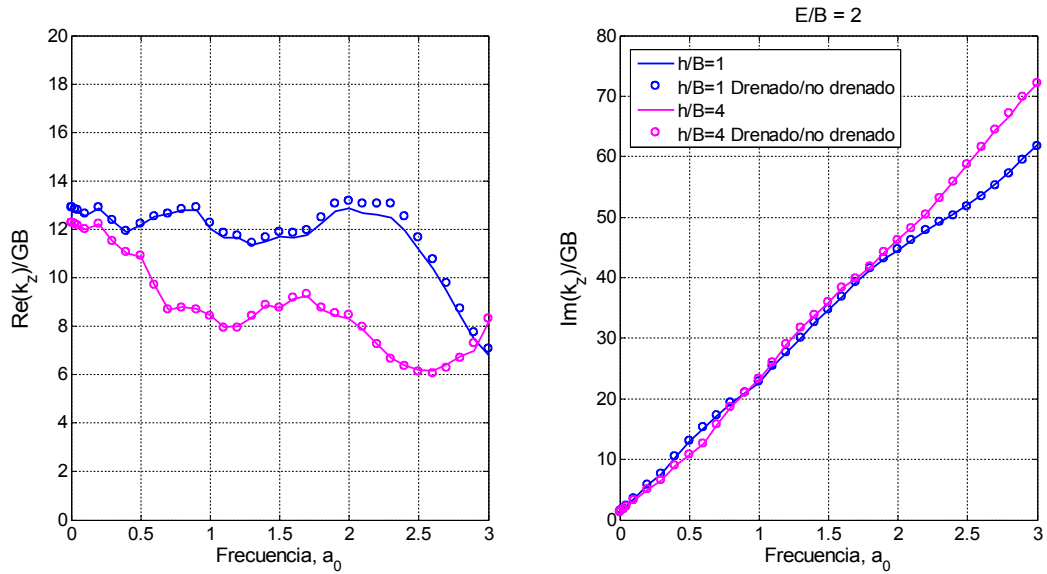


Figura 75: Impedancia vertical. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado.  
Grado de embebimiento  $E/B = 2$

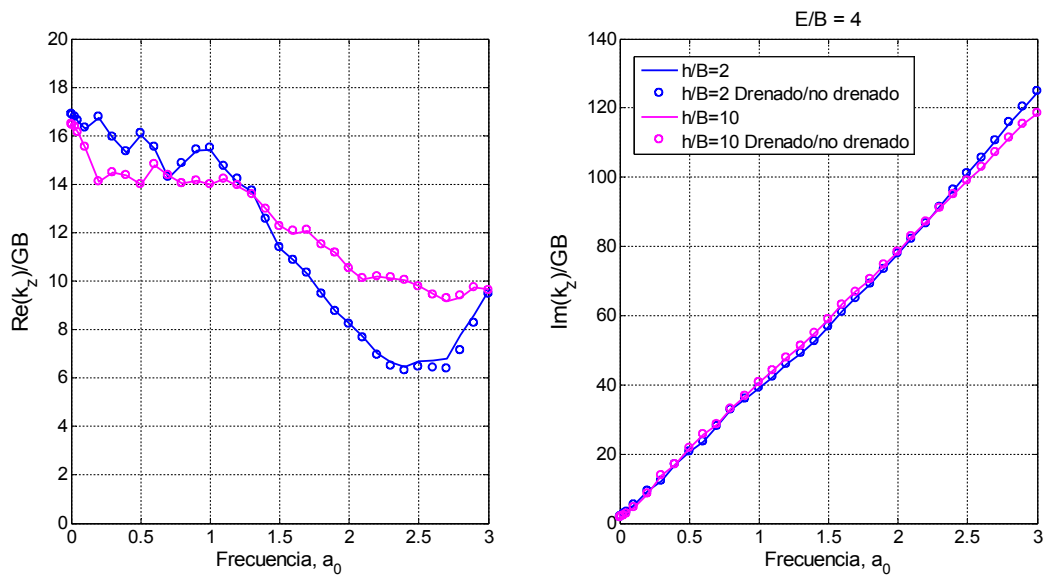


Figura 76: Impedancia vertical. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado.  
Grado de embebimiento  $E/B = 4$

De la lectura de las figuras desde 72 hasta 76 (impedancia vertical), se ve que no hay una diferencia significativa de resultados. A medida que aumenta la relación  $E/B$  se observa cierta diferencia pero, en ningún caso, se puede importante. En el caso del amortiguamiento, la diferencia es prácticamente inexistente, pasando las curvas del modelo poroelástico por todos los puntos del modelo elástico. Por tanto, se considera que ambos modelos son equivalentes.

## 8.4 Impedancias horizontales

Siguiendo con la lectura de resultados, y al igual que en el caso vertical, el término “Drenado-no drenado” se refiere al modelo que utiliza en las regiones características de medio viscoelástico. Si no se dice nada es su equivalente poroelástico. Los resultados obtenidos son los siguientes (figuras 77 a 79):

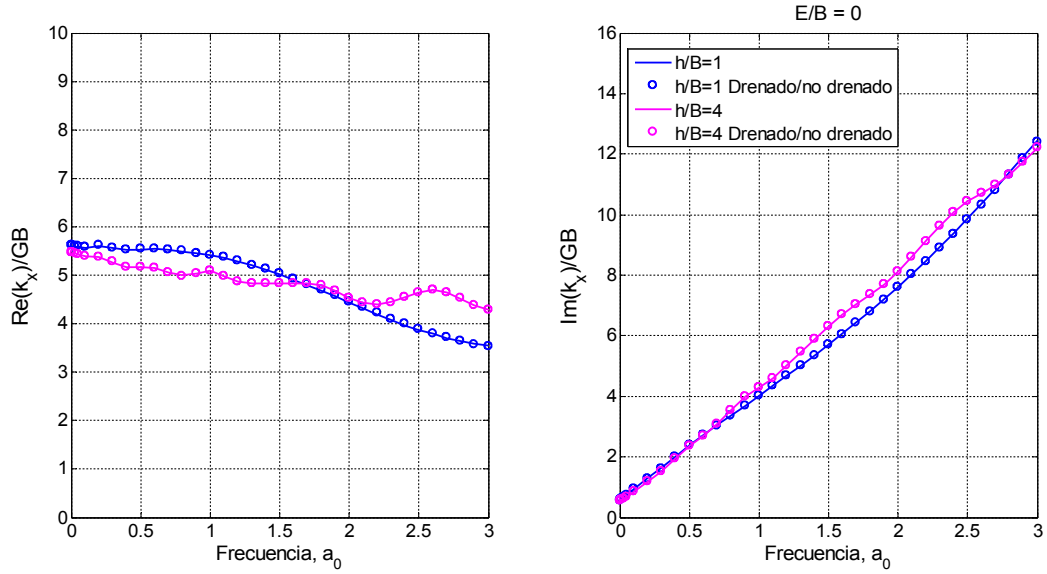


Figura 77: Impedancia horizontal. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado.  
Grado de embebimiento  $E/B = 0$

En este caso se puede observar que las diferencias son menores incluso que en el caso vertical. Por tanto, para el caso horizontal, ambos modelos también se pueden considerar equivalentes.

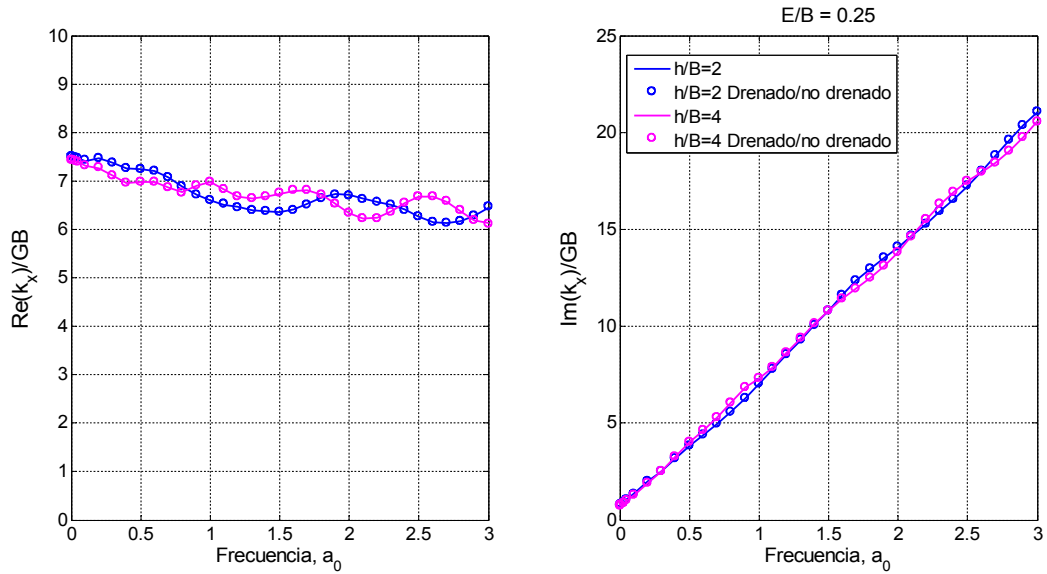


Figura 78: Impedancia horizontal. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado.  
Grado de embebimiento  $E/B = 0,25$

Para alguna curva se observa cierta diferencia pero, en ningún caso, se puede importante. Tanto en el caso del amortiguamiento como en la rigidez, las curvas del modelo poroelástico pasan por todos los puntos del modelo elástico.

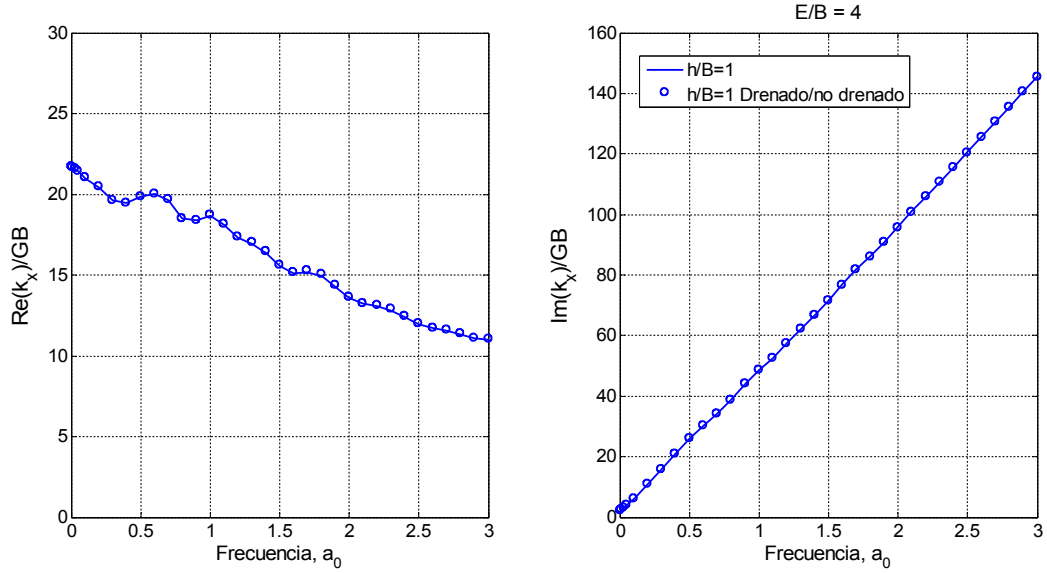


Figura 79: Impedancia horizontal. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado.  
Grado de embebimiento  $E/B = 4$

## 8.5 Impedancias de cabeceo

Los resultados obtenidos son los siguientes (figuras 80 a 82):

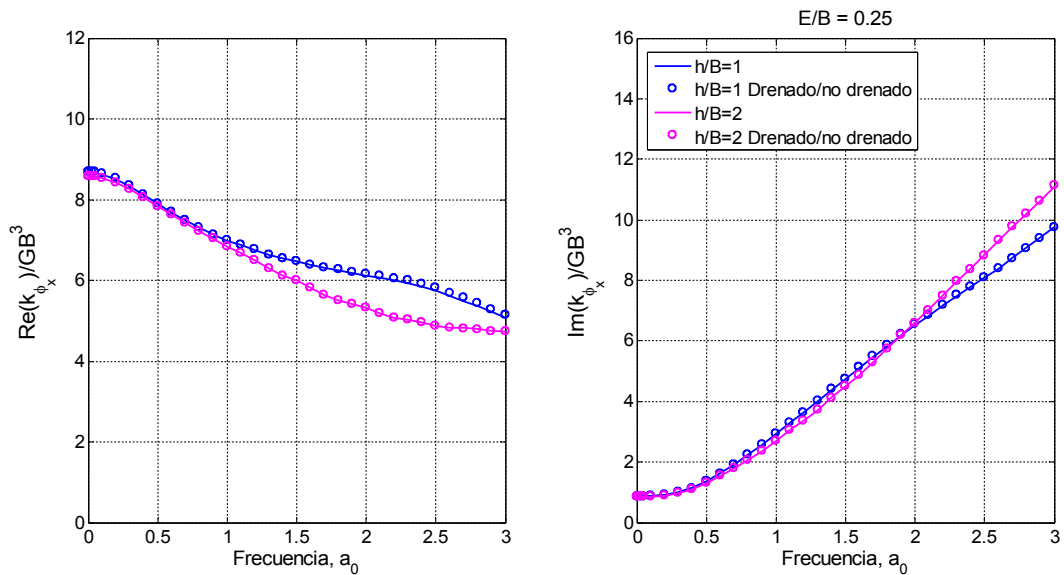


Figura 80: Impedancia de cabeceo. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado.  
Grado de embebimiento  $E/B = 0,25$

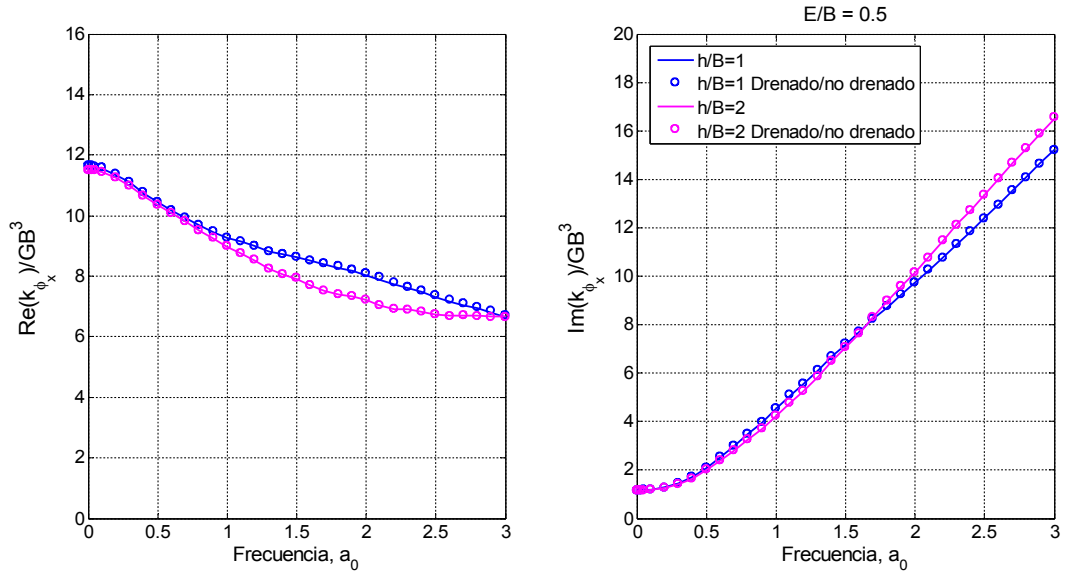


Figura 81: Impedancia de cabeceo. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento  $E/B = 0,5$

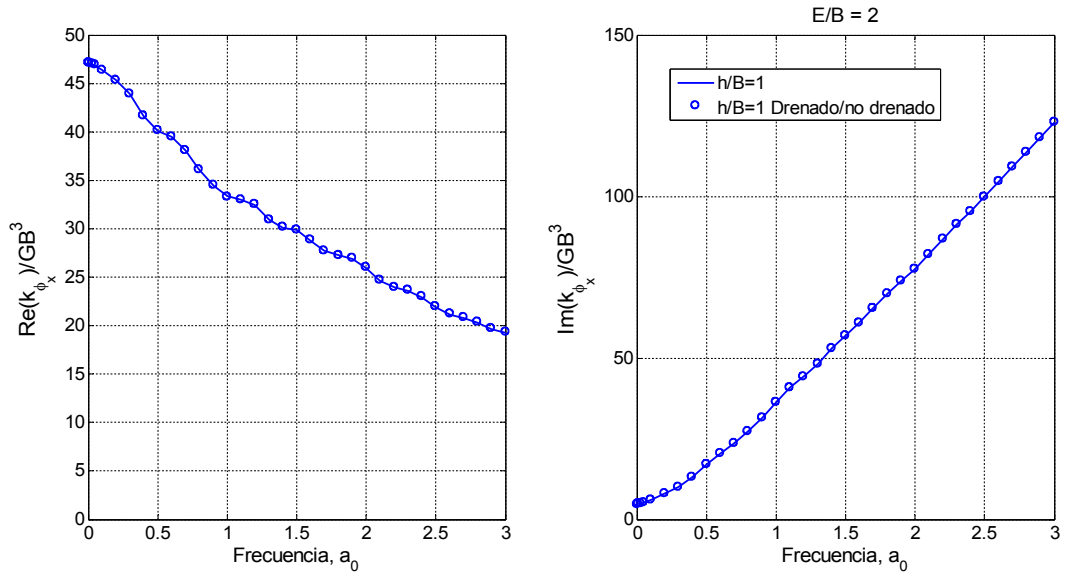


Figura 82: Impedancia de cabeceo. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grado de embebimiento  $E/B = 2$

Respecto de las impedancias vertical y horizontal, solo habrá un cambio en la lectura de gráficas. Mientras que en los dos primeros casos el factor normalizador era  $GB$ , ahora será  $GB^3$ . Al igual que en los casos anteriores, prácticamente no hay diferencias. Tanto en el caso del amortiguamiento como en la rigidez, las curvas del modelo poroelástico pasan por todos los puntos del modelo elástico. Así, también para el caso de cabeceo, ambos modelos se pueden considerar

equivalentes.

## 8.6 Impedancias de torsión

Por último, el caso de torsión es el que presenta un comportamiento más estable por cambios en la profundidad del nivel freático. Así, es el caso para el que se han resuelto menor cantidad de curvas. Los resultados obtenidos son los siguientes (figura 83):

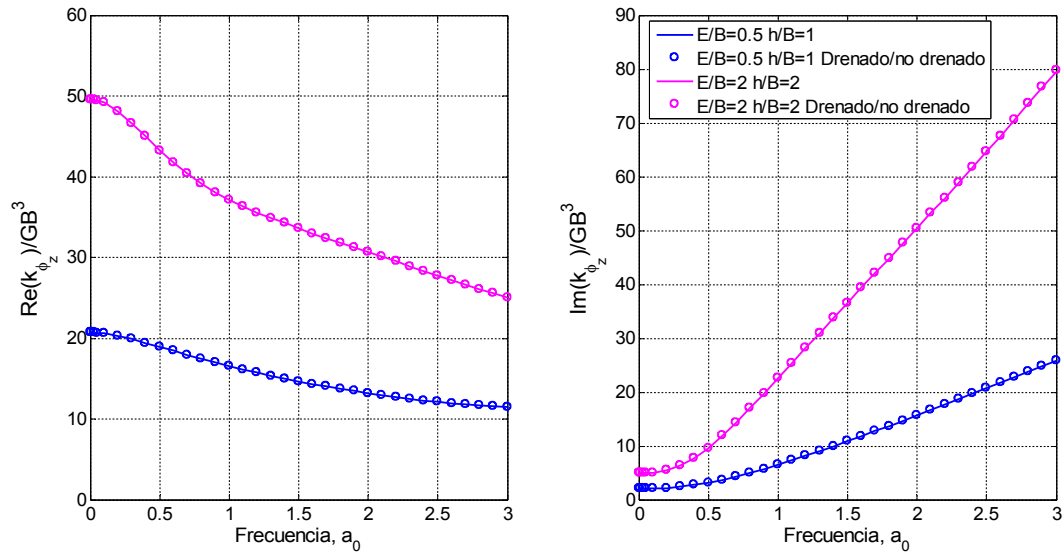


Figura 83: Impedancia de torsión. Comparativa de modelos. Modelo Poroelástico vs Sólido drenado-no drenado. Grados de embebimiento  $E/B = 0,5$  y  $E/B = 2$

Como ya se comentó, la impedancia de torsión prácticamente no se ve afectada por la profundidad de nivel freático y se obtienen unos resultados prácticamente idénticos independientemente del modelo utilizado. Así, también para el caso de torsión, ambos modelos se pueden considerar equivalentes.

## 8.7 Conclusiones

En términos de impedancias, y para el rango de suelos utilizados, se puede afirmar que los modelos con suelos viscoelásticos drenado/no drenado equivalentes ofrecen resultados muy parecidos a los obtenidos con suelos poroelásticos. Así, en los casos horizontal, cabeceo y torsión los resultados son prácticamente idénticos. En el caso vertical, a medida que aumenta la relación  $E/B$ , aumenta la diferencia de resultados entre modelos para la parte real, no habiéndola en el amortiguamiento. De esto se considera que, aún cuando las diferencias son pequeñas, son

apreciables. Ello resulta razonable pues este modo excita predominantemente ondas P, de donde la interacción de ondas  $P_1$  y  $P_2$  (único del modelo poroelástico) pueden jugar un papel visible.

Aunque los resultados obtenidos muestren concordancia, la constante de disipación  $b$  no se ha considerado a la hora de construir el suelo viscoelástico equivalente. Solo cuando  $b=0$  o  $b \rightarrow \infty$  se transita en los límites rigurosos de equivalencia. Por tanto, para los valores de constante de disipación utilizados en el modelo poroelástico (ver Tablas 4 y 5), es razonable que los resultados sean muy parecidos. Con todo ello, en el siguiente capítulo se estudia la influencia de la constante de disipación.



## Capítulo 9

### Influencia de la constante de disipación

#### 9.1 Descripción del problema

En el capítulo 7 se obtuvieron una serie de resultados con una constante de disipación de:

$$b_1 = 1,1986 \cdot 10^7 \frac{N \cdot s}{m^4} \quad (188)$$

siendo este valor el correspondiente a un coeficiente de permeabilidad de:

$$k_1 = 10^{-4} \frac{m}{s} \quad (189)$$

Ahora se obtendrán, con las propiedades del terreno expuestas en el capítulo 7, sobre la batería de problemas del capítulo 8, las impedancias variando el coeficiente de permeabilidad. Así, se podrá ver la influencia de este parámetro sobre los resultados.

Los coeficientes de permeabilidad junto con sus respectivas constantes de disipación serán las de la siguiente tabla (9):

Propiedades	
Permeabilidad	Constante de disipación
$k_1 = 10^{-4} \frac{m}{s}$	$b_1 = 1,1986 \cdot 10^7 \frac{N \cdot s}{m^4}$
$k_2 = 10^{-1} \frac{m}{s}$	$b_2 = 1,1986 \cdot 10^4 \frac{N \cdot s}{m^4}$
$k_3 = \infty \frac{m}{s}$	$b_3 = 0 \frac{N \cdot s}{m^4}$

*Tabla 9. Valores de la permeabilidad y su respectiva constante de disipación a utilizar para comparativa*

## 9.2 Impedancias verticales

En las leyendas se añaden las propiedades utilizadas para cada curva solución. Se expondrán los resultados en figuras para cada relación  $E/B$ . De cada gráfica obtenida, se muestran resultados para diferentes grados de profundidad del nivel freático y constantes de disipación. Los resultados se muestran en las figuras 84 a 88.

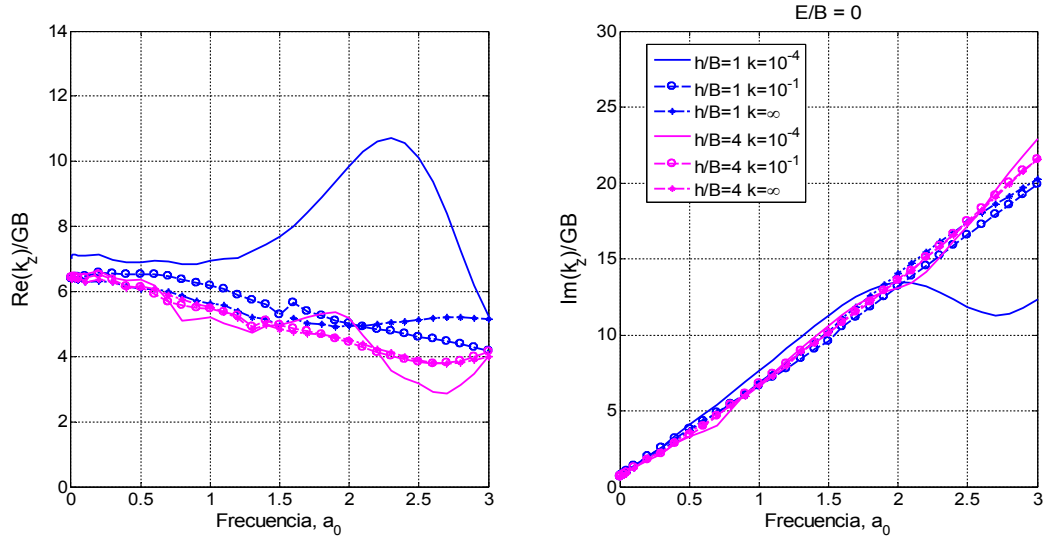


Figura 84: Impedancia vertical. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 0$ .

Se ve claramente la influencia de la constante de disipación, principalmente, a altas frecuencias. Para la relación  $h/B=1$ , hay una fuerte dependencia, mientras que a medida que la relación  $h/B$  aumenta, disminuye su efecto. Dicho de otra manera, cuando aumenta la profundidad del nivel freático, la constante de disipación pierde importancia.

Este comportamiento se observa igual para diferentes grados de embebimiento  $E/B$  (figuras 85 a 88) distintos del caso superficial. Se cumple que el nivel freático tiene un efecto importante para relaciones  $h/B$  bajas.

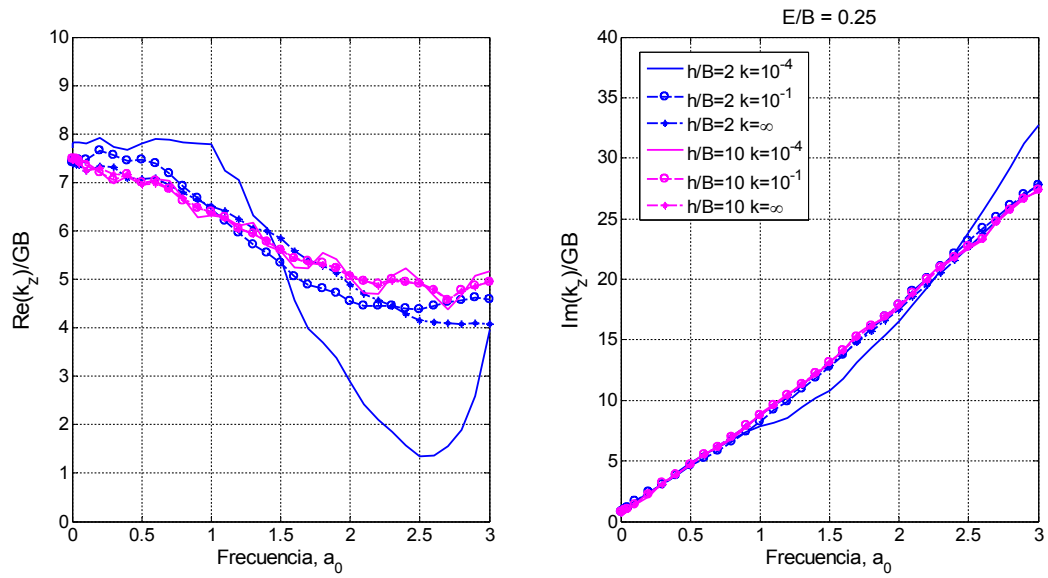


Figura 85: Impedancia vertical. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 0,25$

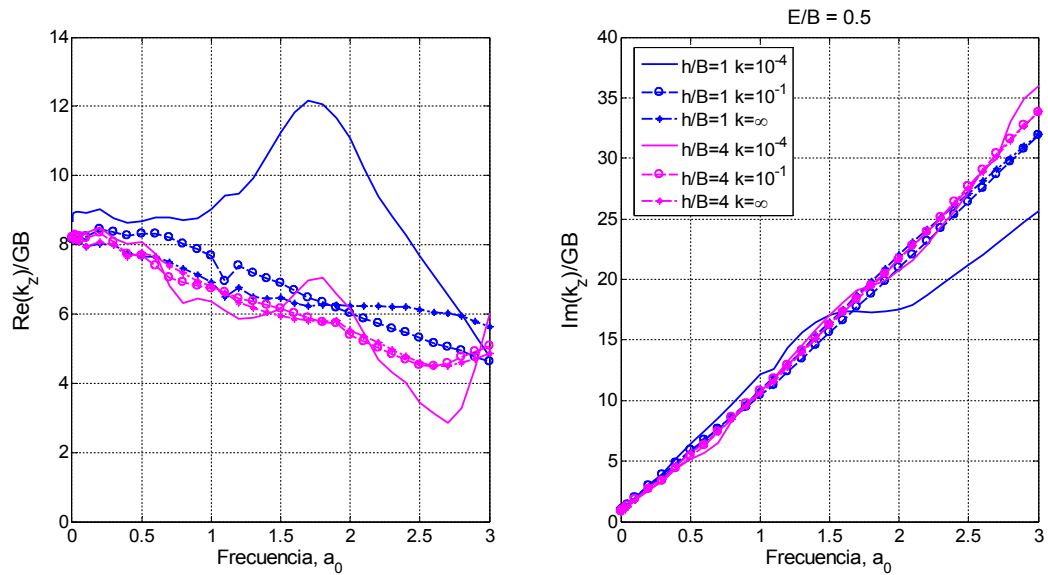


Figura 86: Impedancia vertical. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 0,5$

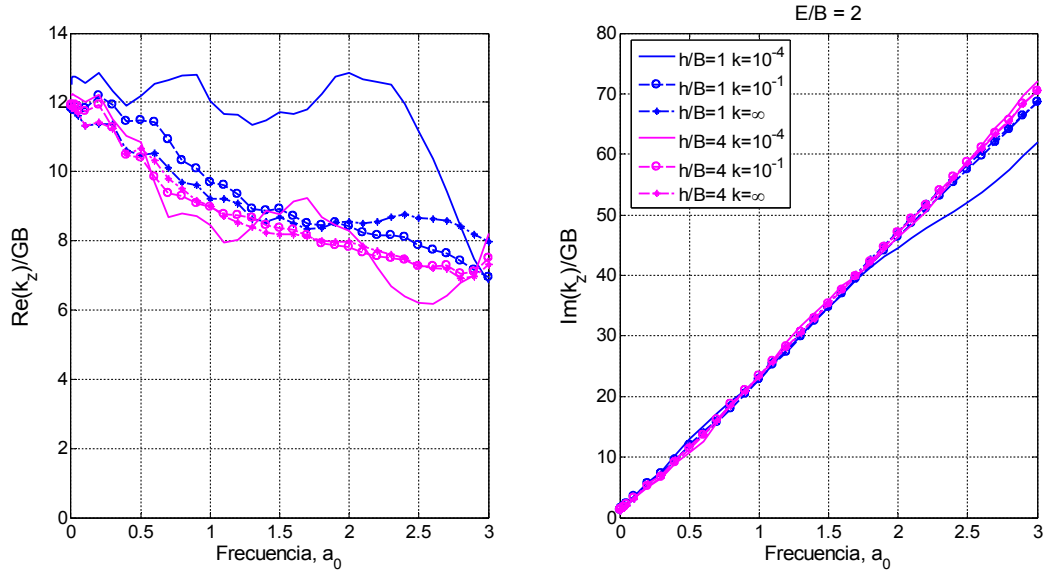


Figura 87: Impedancia vertical. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 2$

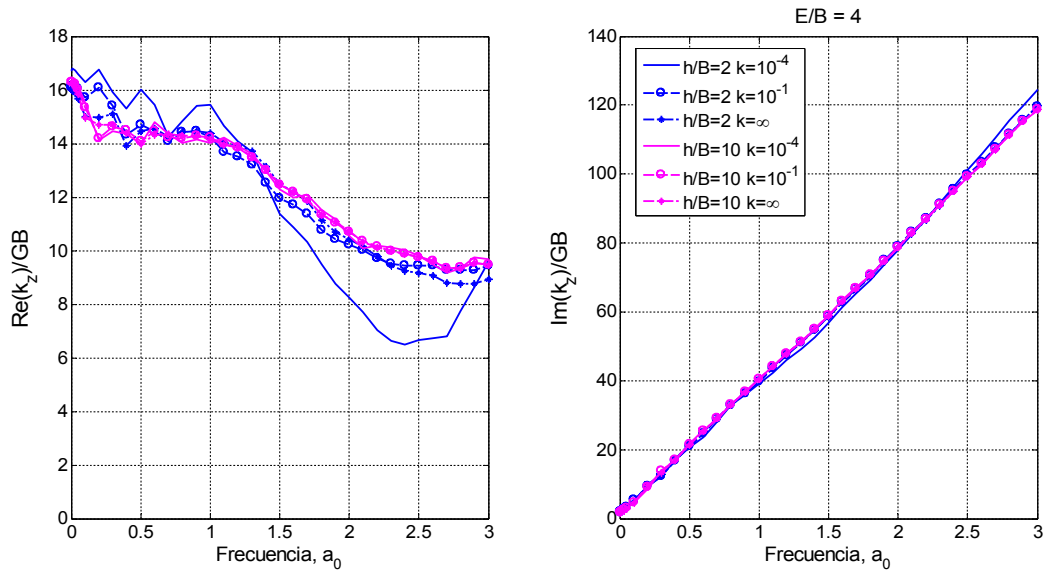


Figura 88: Impedancia vertical. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 4$

De lo mostrado se llega a la conclusión de que la constante de disipación tiene un efecto amplificador de los resultados. A medida que la constante disminuye las curvas obtenidas se hacen más planas. En el caso de la rigidez el efecto amplificador se hace más notorio a altas frecuencias. En el caso del amortiguamiento, el efecto amplificador de la constante de disipación no se aprecia tanto.

### 9.3 Impedancias horizontales

El caso horizontal se muestra en las figuras 89 a 91 para diferentes grados de embebimiento  $E/B$ . Básicamente, se ve un efecto parecido al caso vertical, es decir, para relaciones  $h/B$  bajas hay una dependencia de la constante de disipación, pero este efecto es bastante menos pronunciado, y prácticamente inexistente en el amortiguamiento.

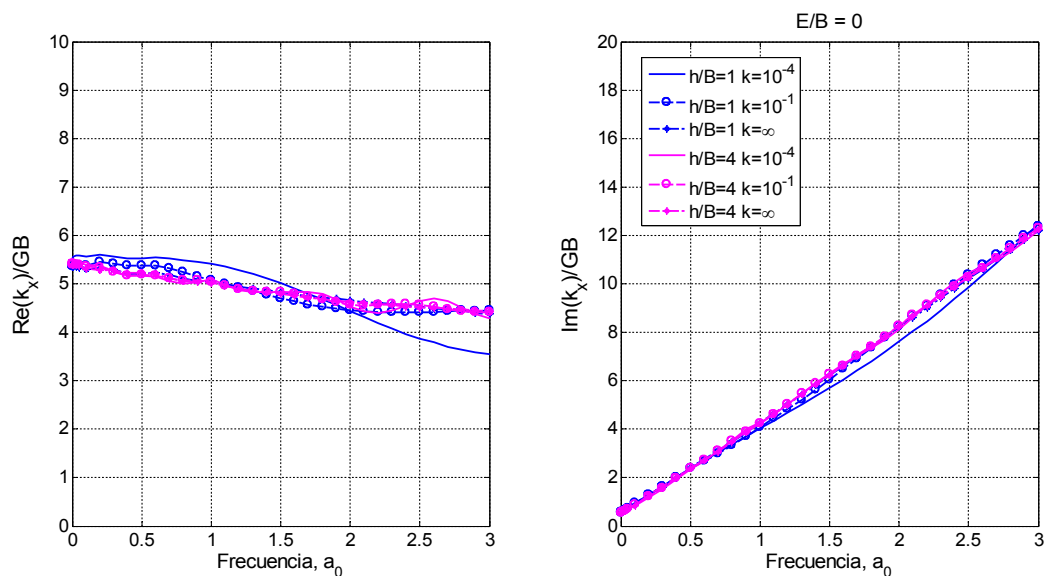


Figura 89: Impedancia horizontal. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 0$ .

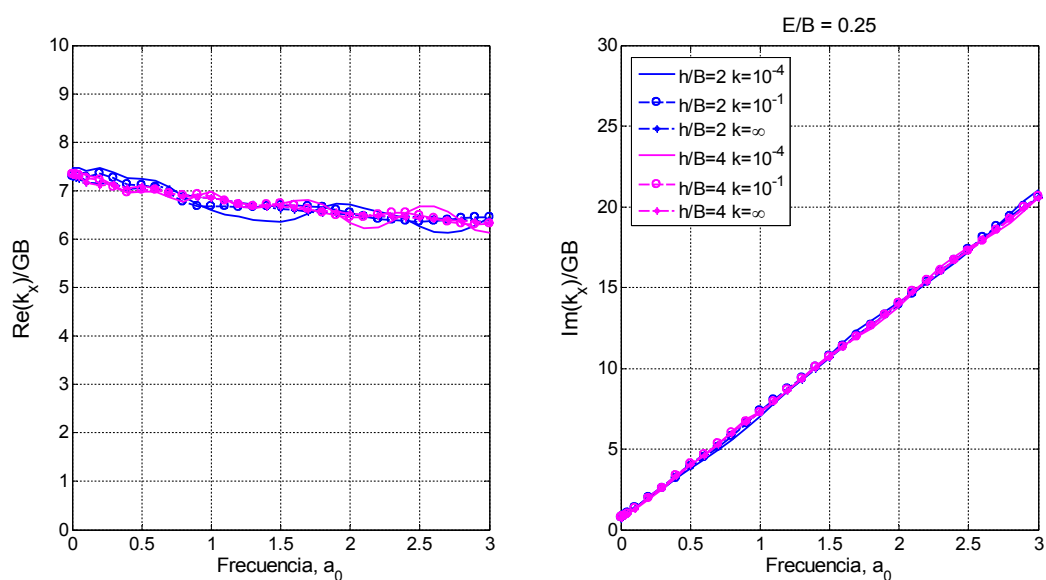


Figura 90: Impedancia horizontal. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 0,25$

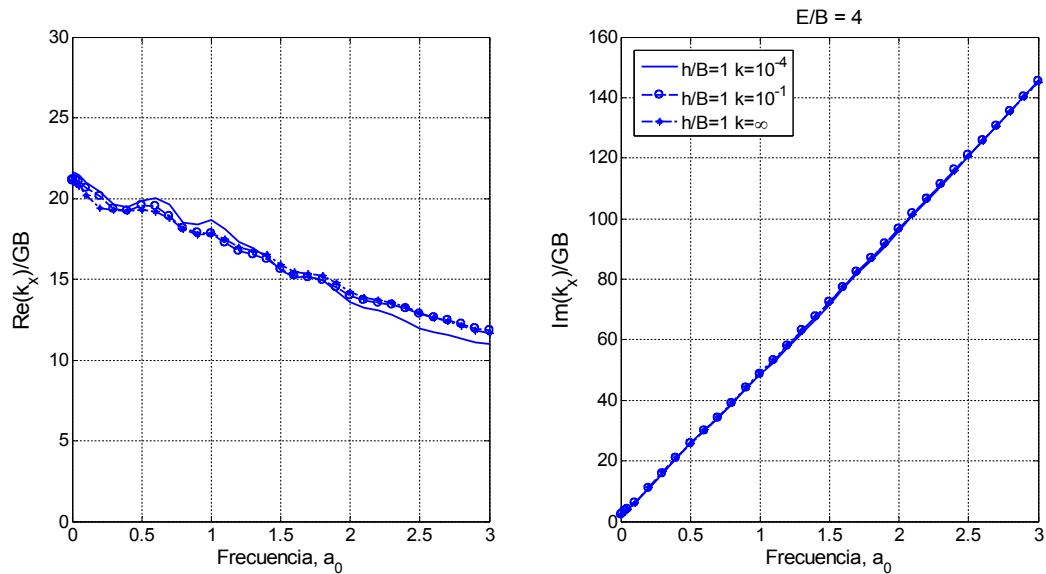


Figura 91: Impedancia horizontal. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 4$

Además, con aumentos de  $E/B$ , se observa que la constante de disipación no tiene un efecto distinto al caso superficial en los resultados. Aunque presenta el mismo comportamiento que en el caso vertical, esto es, a medida que la constante de disipación es mayor el efecto amplificador es mayor, no se puede considerar importante.

Por último, en el caso del amortiguamiento el efecto de la constante de disipación es prácticamente nulo.

## 9.4 Impedancias de cabeceo

Las figuras 92 a 94 muestran los resultados calculados para el caso de cabeceo. Siguiendo la misma tendencia que en los anteriores casos, relaciones  $h/B$  bajas implica una dependencia de la constante de disipación mayor. Pero esa dependencia baja rápidamente, siendo prácticamente inexistente a partir de  $h/B=2$ .

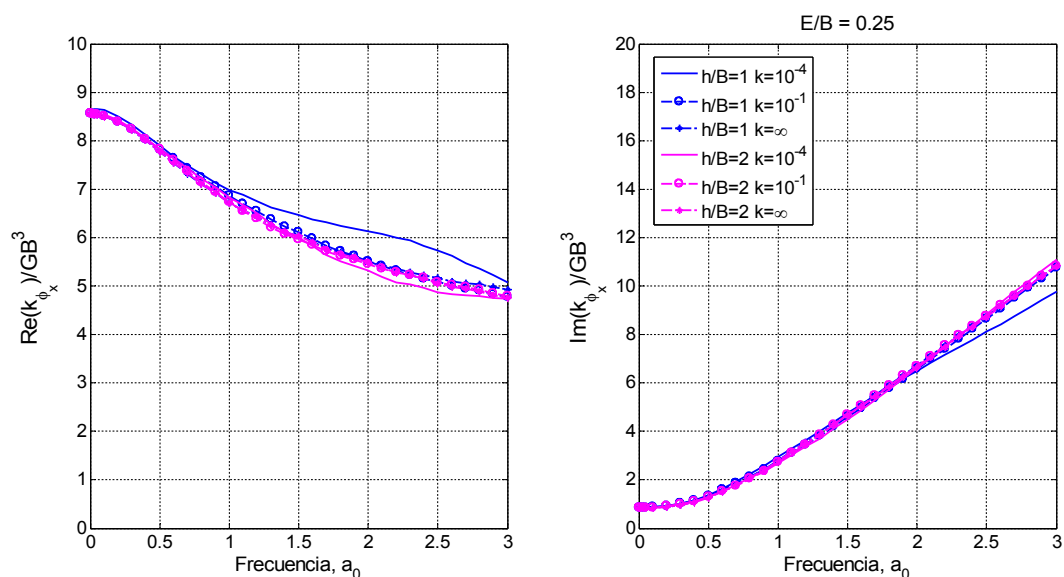


Figura 92: Impedancia de cabeceo. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 0,25$

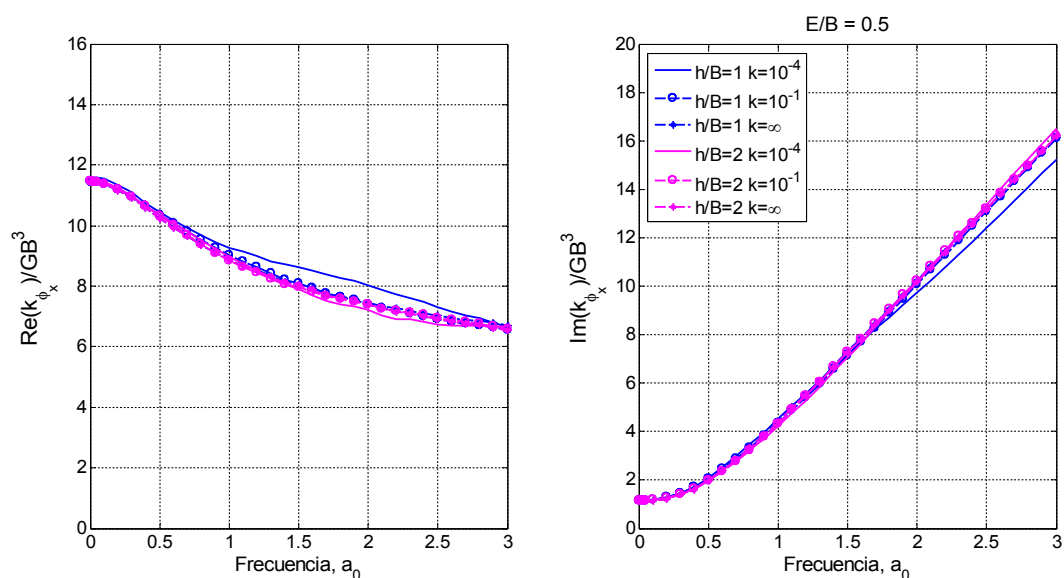


Figura 93: Impedancia de cabeceo. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 0,5$

Por último, aumentos de la relación  $E/B$ , no tiene efectos distintos al caso superficial, siendo lo determinante la profundidad del nivel freático.

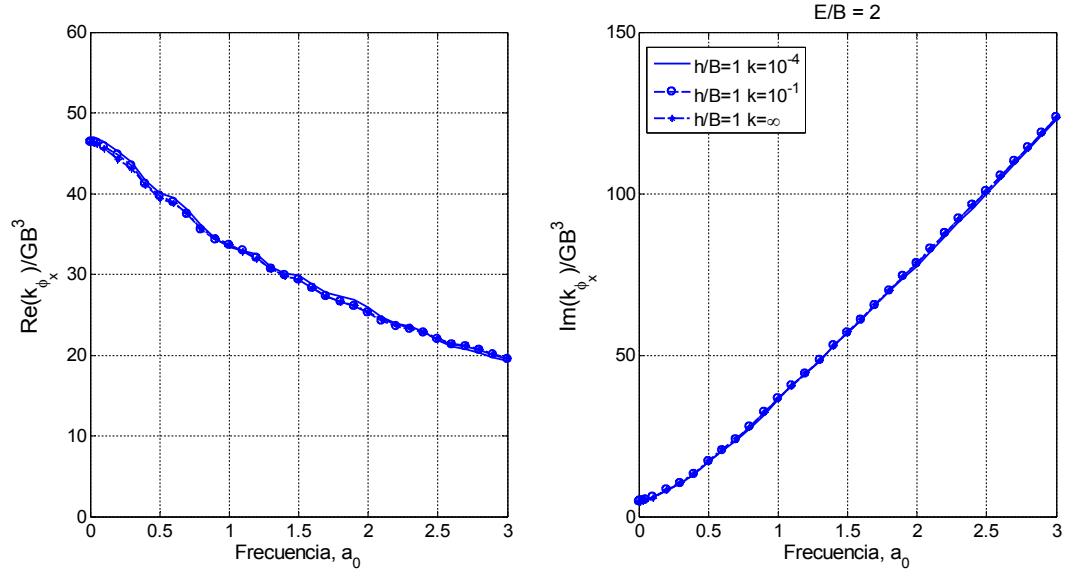


Figura 94: Impedancia de cabeceo. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grado de embebimiento  $E/B = 2$

## 9.5 Impedancias de torsión

Por último, el caso de torsión es el que presenta un comportamiento más estable por cambios en la constante de disipación. Así, es el caso para el que se han resuelto menor cantidad de curvas. Los resultados se muestran en la figura siguiente (95):

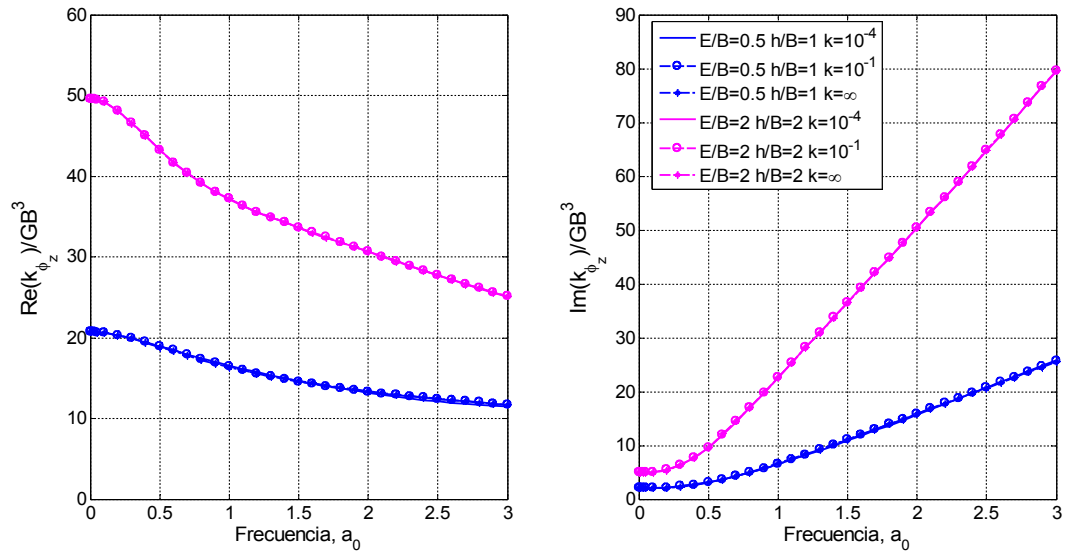


Figura 95: Impedancia de torsión. Influencia de la constante de disipación para una profundidad del nivel freático variable. Grados de embebimiento  $E/B = 0,5$  y  $E/B = 2$



Según lo ya comentado, la constante de disipación tiene muy poco efecto sobre la impedancia de torsión.

## **9.6 Conclusiones**

En el caso vertical se observó una fuerte influencia de la constante de disipación, siendo mucho más pronunciado cuando la relación  $h/B$  es baja. En el amortiguamiento, solo se observó algo de dependencia para relaciones  $h/B$  bajas y a altas frecuencias.

En el caso horizontal y de cabeceo, se vio poca dependencia, y solo cuando la profundidad del nivel freática es baja. En el amortiguamiento, prácticamente no había dependencia de la constante de disipación.

Por último, para el caso de torsión, la influencia de la constante de disipación en los resultados es prácticamente nula.

De todo lo visto se concluye que la constante de disipación solo tiene un efecto importante en el caso vertical para relaciones  $h/B$  bajas, en menor medida en el caso vertical para relaciones  $h/B$  altas, horizontal y de cabeceo y, prácticamente, nulo en el caso de torsión.

## **Capítulo 10**

### **Conclusiones y desarrollos futuros**

#### **10.1 Revisión y conclusiones**

En este TFM se ha estudiado el cálculo de impedancias de cimentaciones no pilotadas que descansan sobre terreno seco, y que, a cierta profundidad, estará el nivel freático. Para ello se ha establecido un modelo con dos regiones. Una superior, poroelástica, sin agua en sus poros y otra inferior, poroelástica también, pero considerada saturada (no admite más agua en sus poros). La interacción entre las dos regiones se ha establecido soldada y permeable.

Para su estudio se ha empleado un modelo tridimensional de Elementos de Contorno desarrollado en el dominio de la frecuencia que permite resolver problemas en los que coexisten regiones de distinta naturaleza: elásticas o viscoelásticas, fluidas y poroelásticas. Las ecuaciones del MEC se aplican a cada una de regiones de forma individual para, posteriormente, acoplar el conjunto de forma rigurosa mediante ecuaciones adicionales de equilibrio y compatibilidad en las superficies en contacto que constituyen las interfases.

En el capítulo 2 se expusieron los aspectos relacionados con la formulación de los medios implicados en este TFM, es decir, elásticos y poroelásticos, que se incluyen en los modelos acoplados que se desarrollan posteriormente. Se comenzó con un repaso de las ecuaciones de gobierno y de la propagación de ondas en los distintos tipos de medio. Luego, se abordó la formulación integral de las ecuaciones de gobierno en términos de las variables en el contorno y se mostró la solución fundamental armónica para cada tipo de región.

El capítulo 3 se dedicó a presentar una estrategia de solución de estos modelos mediante el Método de los Elementos de Contorno, analizando las dificultades que la aplicación del método comporta. Se describieron los tipos de elementos utilizados y diversos aspectos relacionados con la discretización del contorno, para a continuación plantear el procedimiento de evaluación de las

integrales extendidas al contorno de los elementos presentes en la formulación. Posteriormente, se definieron las posibles condiciones de contorno que se pueden presentar y se abordaron las condiciones en las interfases cuando las regiones se encuentran acopladas. Finalmente, el último punto se dedicó a presentar estrategias para evitar problemas numéricos relacionados con la geometría de la discretización y con el acoplamiento entre regiones de distinta naturaleza.

El capítulo 4 se dedicó a mostrar el cálculo de impedancias de cimentaciones no pilotadas. Se describieron las particularidades que la aplicación del modelo acoplado MEC presenta a la hora de abordar el problema: la zapata es considerada como un sólido rígido y el suelo en el que descansa se caracterizó como un medio poroelástico. Dado que se empleó una nueva versión de código basado en MEC, el modelo propuesto se sometió a validación con resultados existentes en la bibliografía.

Los capítulos 5 y 6 se dedicaron a la validación del nuevo código. La primera fue reproducir los resultados obtenidos por Domínguez (1993) para una zapata circular. Aquel problema se resolvió con un modelo axisimétrico. Dado que el código disponible funciona en 3D, se generó un cuarto de modelo con doble plano de simetría. Se obtuvieron impedancias verticales, horizontales, de cabeceo y torsión, presentando los resultados en forma normalizada. La segunda validación fue reproducir los resultados obtenidos por investigadores de la División hace algunos años. Se trataba de una zapata cuadrada superficial, la cual descansaba sobre un terreno poroelástico. A partir de ahí, se calcularon distintas situaciones, bien añadiendo una segunda región inferior, o variando algunas propiedades. Tanto en el problema de Domínguez como en los de la división se pudo comprobar las excelentes prestaciones del nuevo código.

El capítulo 7 se dedicó al estudio de la influencia del nivel freático sobre la impedancia. Se obtuvieron las impedancias verticales, horizontales, de cabeceo y torsión para distintos grados de embebimiento. Además, en los capítulos siguientes, primero, se comparó el modelo propuesto en este TFM con otro, utilizado habitualmente, para modelar el nivel freático, y, segundo, se estudió la influencia de la constante de disipación sobre los resultados. Las principales conclusiones que se extrajeron fueron:

- Se observa un aumento del rizado a medida que aumenta el enterramiento, siendo este efecto más pronunciado en impedancia vertical y horizontal, en menor medida en cabeceo, y, prácticamente, inexistente en torsión. Pero, a medida que crece la profundidad del nivel freático, las curvas tienden a seguir una recta con baja pendiente.

- El nivel freático tiene un efecto muy importante en impedancia de cabeceo a bajas frecuencias cuando la constante de disipación es elevada, disminuyendo este efecto drásticamente con un leve incremento de la profundidad del nivel. En el caso de impedancias vertical y horizontal, dado el efecto rizado que se produce con el aumento del enterramiento, los valores fluctúan. No obstante, se puede concluir que con el aumento del nivel freático, disminuyen las impedancias y presentan una dependencia importante de ese factor. Por último, en el caso de torsión, se observa una dependencia prácticamente inexistente.
- De la comparativa de modelos poroelástico-poroelástico vs sólido drenado-no drenado se puede extraer que ambos modelos son equivalentes. La diferencia es pequeña en la impedancia vertical y prácticamente inexistente en el resto.
- De todo lo anterior se concluye que la constante de disipación  $b$  tiene un efecto importante sobre el comportamiento dinámico de la cimentación, siendo especialmente pronunciado en la impedancia vertical. En general, a medida que aumenta la constante  $b$  se obtienen valores mayores de las impedancias dinámicas, tendiendo hacia los valores correspondientes a un suelo ideal elástico no drenado.

De lo visto se puede concluir que el modelo poroelástico (bifásico) presenta importantes mejoras respecto del monofásico, para estudiar la respuesta dinámica de cimentaciones, compensando en esfuerzo computacional extra a realizar.

## ***10.2 Desarrollos futuros***

El nuevo software desarrollado disponible presenta una prestaciones excelentes y es adecuado para abordar líneas futuras de investigación. Así, siempre está abierta la posibilidad de mejora del código, bien sea mejorando el entorno gráfico, reduciendo el tiempo de cómputo o añadiendo más prestaciones. Respecto de posibles líneas que afecten al campo de estudio de este TFM se puede citar, por ejemplo, el estudio de zapatas circulares en aplicaciones de aerogeneradores. Este tipo de cimentaciones es muy utilizada en este tipo de estructuras, y se ha podido comprobar, con el primer problema de validación resuelto, las muy buenas prestaciones que presenta el nuevo código MEC de la División. En este TFM se ha abordado la resolución de zapatas que se pueden asimilar a un sólido rígido. Así, otra línea de investigación puede ser añadir flexibilidad a la cimentación. Como se comentó al inicio del TFM, este tipo de cimentaciones presenta un comportamiento distinto, y su respuesta dinámica se debe obtener para cada partícula.

Por último, la División ya tiene experiencia en el estudio de interacción de elementos, como, por ejemplo, pilotes. Así, otra línea puede ser el estudio de interacción de cimentaciones en parques, sean pilotadas o no, es decir, cómo afecta el comportamiento de una cimentación sobre el resto.

---

## ***Bibliografía***

Abascal, R., (1984), “Estudio de Problemas Dinámicos en Interacción Suelo-Estructura por el Método de los Elementos de Contorno”. Ph. D. Thesis, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Sevilla.

Abascal, R. y Domínguez, J., (1986), “Vibrations of Footings on Zoned Viscoelastic Soil”. J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 112, pp. 433-447.

Abascal, R. y Domínguez, J., (1990), “Dynamic Response of Two-dimensional Foundations Allowed to Uplift”. Computer and Geotechnics, Vol. 9, pp. 113-129.

Alarcón, E., Martín, A. y París, F., (1979), “Boundary Elements in Potential and Elasticity Theory”. Computer and Structures, Vol. 10, pp. 351-362.

Alarcón, E., Cano, J. J. y Domínguez, J., (1989), “Boundary Element Approach to the Dynamic Stiffness Functions of Circular Foundations”. Int. J. Numer. Anal. Methods Geomechs., Vol. 13, pp. 645-664.

Apsel, R. J., (1979), “Dynamic Green’s Functions for Layered Media and Applications to Boundary-Value Problems”. Ph. D. Thesis, Universidad de California, San Diego.

Aznárez, J.J., (2002), “Efectos de los fenómenos de interacción incluyendo los factores espaciales y sedimentos de fondo en la respuesta sísmica de presas bóveda”. Tesis doctoral. Universidad de Las Palmas GC.

Aznárez, J. J., Maeso, O. y Chirino, F., (1999), “Una Técnica Numérica para la Determinación de Rigideces Dinámicas de Cimentaciones sobre Suelos Saturados”. Proc. I Congreso Nacional Ing. Sísmica, Murcia (en prensa).

Banaugh, R. P. y Goldsmith W., (1963a), “Diffraction of Steady Acoustic Waves by Surfaces of Arbitrary Shape”. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 35, pp. 1590- 1601.

Banerjee, P. K. y Butterfield, R., (1977), “Boundary Element Method in Geomechanics”. In Finite Elements in Geomechanics, G. Gudehus (Ed.), pp. 529-570, J. Wiley, London.

Banerjee, P. K. y Butterfield, R., (1981), “Boundary Element Method in Engineering Science”. McGraw-Hill, London.

- Banerjee, P. K., Ahmad, S. y G. D. Manolis, (1987), "Advanced Elastodynamic Analysis". In Boundary Element Methods in Mechanics, D. E. Beskos (Ed.), pp. 257-284, North-Holland, Amsterdam.
- Beskos, D. E. (Ed.), (1987a), "Boundary Element Methods in Mechanics". North-Holland, Amsterdam.
- Beskos, D. E., (1987b), "Boundary Element Methods in Dynamic Analysis". Appl. Mech. Reviews, Vol. 40, pp. 1-23.
- Biot, M. A., (1941a), "General Theory of Three-dimensional Consolidation". J. Appl. Phys., Vol. 12, pp. 155-164.
- Biot, M. A., (1941b), "Consolidation Settlement Under a Rectangular Load Distribution". J. Appl. Phys., Vol. 12, pp. 426-430.
- Biot, M. A. y Chingan, F. M., (1941c), "Consolidation Settlement of a Soil with an Impervious Top Surface". J. Appl. Phys., Vol. 12, pp. 578-581.
- Biot, M. A., (1955), "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid". J. Appl. Phys., Vol. 26, pp. 182-185.
- Biot, M. A., (1956a), "General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material". J. Appl. Mech. Trans., ASME, Vol. 78, pp. 91-96.
- Biot, M. A., (1956b), "Theory of Propagation of Elastic Waves in Fluid-Saturated Porous Solid". J. Acoust. Soc. Am., Part. I, Low-frequency range, 168-178, Part. II., Higher frequency range, pp. 179-191.
- Biot, M. A. y Willis, D.G., (1957), "The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation". J. Appl. Mech., ASME, Vol. 24, pp. 594-601.
- Biot, M. A., (1962), "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media". J. Appl. Phys., Vol. 33, pp. 1482-1498.
- Bonnet, G., (1987), "Basic Singular Solutions for a Poroelastic Medium in the Dynamic Range". J. Acoust. Soc. Am., Vol. 82, pp. 1758-1762.

---

Bougacba, S., Roësset, J. M., y Tassoulas, J. L., (1993), "Dynamic Stiffness of Foundations on Fluid-Filled Poroelastic Stratum". J. Eng. Mech., ASCE., Vol. 119, pp. 1649-1662.

Brebbia, C. A. y Domínguez, J., (1992), "Boundary Elements. An Introductory Course". 2ª ed., CMP, Southampton y McGraw-Hill Book Comp., New York.

Chen, J., y Dargush, G. P., (1995), "Boundary Element Method for Dynamic Poroelastic and Thermoelastic Analyses". Int. J. Solids and Struct., Vol. 32, pp. 2257-2278.

Cheng, A. H. D., Badmus, T., y Beskos. D. E., (1991), "Integral Equation for Dynamic Poroelasticity in Frequency Domain with Boundary Element Solution". J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 117, pp. 1136-1157.

Chirino, F., Maeso, O. y Aznárez, J. J., (2000), "Una Técnica Simple para el Cálculo de las Integrales en el Sentido del Valor Principal de Cauchy en el MEC 3D". R. Int. Metod. Numer. Calc. Des. Ing., Vol. 16, No. 1, pp. 77-95.

Chopra, M. B., y Dargush, G. P., (1995), "Dynamic Analysis of Axisymmetric Foundations on a Poroelastic Stratum using BEM". Proc., 10th Eng. Mech. Spec. Conf., ASCE, New York, N. Y., Vol. 2, pp. 1046-1049.

Cole, D. M., Kosloff, D. D. y Minster, J. B., (1978), "A Numerical Boundary Integral Equation Method for Elastodynamics-I". Bull. Seismol. Soc. Am., Vol. 68, pp. 1331-1357.

Cruse, T. A., (1968), "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem-II". J. Math. Anal. Appl., Vol. 22, pp. 341-355.

Cruse, T. A. y Rizzo, F. J., (1968), "A Direct Formulation and Numerical Solution for the General Transient Elastodynamic Problem-I". J. Math. Anal. Appl., Vol. 22, pp. 244-259.

Dargush, G. F. y Chopra, M. B., (1996), "Dynamic analysis of Axisymmetric Foundations on Poroelastic Media". Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 122, No. 7, pp. 623-632.

Domínguez, J., (1977), "Computation of Stresses Near Anchor Plates: An Application of the Boundary Element Method". Ph. D. Thesis, Universidad de Sevilla (en español).

Domínguez, J., (1978a), "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations". Research Report R78-20, Dept. Civ. Eng., Massachusetts Inst. of Tech., Cambridge, Mass.



Domínguez, J., (1978b), "Response of Embedded Foundations to Travelling Waves". Research Report R78-24, Dept. Civ. Eng., Massachusetts Inst. of Tech., Cambridge, Mass.

Domínguez, J., (1981), "The Use of the Method of Images in B.E.M. for Elastodynamics". Communication at the N.A.T.O. Seminar on Numerical Methods in Geomechanics, Vimeiro, Portugal.

Domínguez, J. y Alarcón, E., (1981a), "Elastodynamics". Progress in Boundary Element Methods, C. A. Brebbia (Ed.), Cap. 7, Pentech Press.

Domínguez, J. y Alarcón, E., (1981b), "Elastodynamics". In Progress in Boundary Element Methods, Vol. 1, C. A. Brebbia (Ed.), pp. 213-257, Pentech Press, London.

Domínguez, J. y Abascal, R., (1982), "El Uso de una Solución Fundamental Compuesta para el Cálculo de Rigideces de Cimentaciones mediante el M.E.C.". Anales de Ingeniería Mecánica.

Domínguez, J., (1984), "Comment on an Implementation of the Boundary Element Method for Zoned Media with Stress Discontinuities". Int. J. Numer. Methods in Engineering, Vol. 22, pp. 1756.

Domínguez, J. y Abascal, R., (1987), "Dynamics of Foundations". In Topics in Boundary Element Research, Vol. 4, C. A. Brebbia (Ed.), pp. 27-75, Springer- Verlag, Berlin.

Domínguez, J. y Abascal, R., (1989), "Seismic Response of Strip Footings on Zoned Viscoelastic Soils". J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 115, pp. 913-934.

Domínguez, J., (1991), "An Integral Formulation for Dynamic Poroelasticity". J. Appl. Mech., Vol. 58, pp. 588-591.

Domínguez, J., (1992), "Boundary Element Approach for Dynamic Poroelastic Problems". Int. J. Numer. Methods in Eng., Vol. 35, pp. 307-324.

Domínguez, J., (1993), "Boundary elements in dynamics". Computational Mechanics Publications, Southamton y Elsevier Applied Science, London.

Domínguez, J., (1995), "Formulación Estática y Dinámica de la Poroelasticidad". Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Domínguez, J., Gallego, R. y Japón, B. R., (1997), "Effects of Porous Sediments on Seismic

---

Response of Concrete Gravity Dams”. J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 123, pp. 302-311.

Doyle, J. M., (1966), “Integration of the Laplace Transformed Equations of Classic Elastokinetics”. J. Math. Anal. and Appl., Vol. 13, pp. 118

Emperador, J. M. y Domínguez, J., (1989), “Dynamic Response of Axisymmetric Embedded Foundations”. Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 18, pp. 1105-1117.

Emperador, J. M. y Aznárez, J. J., (1995), “Cálculo de Cimentaciones Axisimétricas mediante el MEC”. Sol. Prob. Ing. Met, Num., M. Cerrolaza y A. Guillén (Eds.), SVMNI, A.D., pp. 65-75.

Eringer, A. C. y Suhubi, E., (1975), “Elastodynamics”. Academic Press, Vol. II, Linear Theory.

Fredholm, I., (1905), “Solution d’un Problème Fondamental de la Theorie de L’elasticité”. Arch. Mat. Astronom. Fysik., Vol. 2.

Friedman, M. B. y Shaw, R. P., (1962), “Diffraction of Pulses by Cylindrical Obstacles of Arbitrary Cross Section”. J. Appl. Mech., Vol. 29, pp. 40- 46.

García, F. (2012), “Comportamiento dinámico de medios poroelásticos en relación con problemas de interacción suelo-estructura y suelo-agua-estructura”. Tesis doctoral. Universidad de Las Palmas GC.

Gracia, Iker. (2002), “Aplicación del método de los elementos de contorno a la determinación de rigideces dinámicas de cimentaciones sobre suelos poroelásticos”. PFC. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Las Palmas GC.

Guiggiani, M. y Casalini, P., (1987), “Direct computation of Cauchy Principal Value integrals in advanced boundary elements”. Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 24, pp. 1711-1720.

Guiggiani, M. y Gigante, A., (1990), “A general algorithm for multidimensional Cauchy Principal Value integral in boundary element method”. J. Applied Mechanics, ASME, Vol. 51, pp. 906-915.

Halpern, M., (1982), “Dynamic Response of a Saturated Poroelastic Half-Space to Imposed Surface Loadings”. PhD thesis, Universidad Carnegie-Melln, Pittsburgh, Pa.

Halpern, M. R., y Christiano, P., (1986), “Steady-State Harmonic Response of a Rigid Plate Bearing on a Liquid-Saturated Poroelastic Half-Space”. Earthquake Eng. and Struct. Dyn., Vol. 14, pp. 439-454.

Helmholtz, H. , (1860), "Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit Offenen Enden". J. Reine Angw. Math., Vol. 57, pp. 1-72.

Japón, B. R., Gallego, R., Domínguez, J., (1997), "Dynamic Stiffness of Foundations on Saturated Poroelastic Soils". J. Eng. Mech., Vol. 123, No. 11, pp. 1121-1129.

Karabalis, D. L., (1984), "Dynamic Response of Three-dimensional Foundations". Ph. D. Thesis, Universidad de Minnesota, Minneapolis.

Karabalis, D. L. y Beskos, D. E., (1984), "Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method". Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 12, No. 1, pp. 73-94.

Karabalis, D. L. y Spyrakos, C. C., (1984), "Dynamic Response of Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method". Int. Symposium on Dynamic Soil-Struct. Int., Minneapolis, Balkema, Rotterdam.

Karabalis, D. L., Spyrakos, C. C. y Beskos, D. E., (1984), "Dynamic Response of Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method". In Dynamic Soil-structure Interaction, D. E. Beskos, T. Krauthammer & I. Vardoulakis (Eds.), pp. 19-24, A. A. Balkema, Rotterdam.

Karabalis, D. L. y Beskos, D. E., (1985), "Dynamic Response of 3-D Flexible Foundation by Time Domain BEM and FEM". Soil Dyn. Earthquake Eng., Vol. 4, pp. 91-101.

Karabalis, D. L. y Beskos, D. E., (1987), "Dynamic Soil-Structure Interaction". In Boundary Element Methods in Mechanics, D. E. Beskos (Ed.), pp. 499-562, North-Holland, Amsterdam.

Kassir, M. K., y Xu, J., (1988), "Interaction Functions of a Rigid Strip Bounded to Saturated Elastic Half-Space". Int. J. Solids and Struct., Vol. 24, pp. 915-936.

Kobayashi, S., (1987), "Elastodynamics". In Boundary Element Methods in Mechanics, D.E. Beskos (Ed.), pp. 191-255, North-Holland, Amsterdam.

Kupradze, V. D., (1963), "Dynamical Problems in Elasticity". Progress in Solid Mechanics, I. N. Sneddon y R. Hill (Eds.), Vol. 3, North-Holland, Amsterdam.

Kupradze, V. D., Gegelia, R. G., Basheleishvili, M. O. y Burchuladze, T. V., (1979), "Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity". North-

---

Holland, Amsterdam.

Lachat, J. C., (1975), "A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics". Ph. D. Thesis, Universidad de Southampton.

Lachat, J. C. y Watson, J. O., (1976), "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics". Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp. 991-1005

Li, H. B., Han, G. M. y Mang, H. A., (1985), "A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct boundary element method". Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 21, pp. 2071-2098.

Luco, J. E. y Westmann, R. A., (1971), "Dynamic Response of Circular Foundations". J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 97, pp. 1381-1395.

Luco, J. E., (1976a), "Torsional Response of Structures to Obliquely Incident Seismic SH Waves". Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 4, pp. 207-219.

Luco, J. E., (1976b), "Torsional Response of Structures for SH-Waves: The Case of Hemispherical Foundations". Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 66, pp. 109-124.

Maeso, O., Aznárez, J. J. y Chirino, F., (1999), "Aplicación del M.E.C. a la Determinación de Rigideces Dinámicas de Cimentaciones Embebidas sobre Suelos Poroelásticos". IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, SEMNI, Sevilla.

Manolis, G. D., (1983), "A Comparative Study on Three Boundary Element Method Approaches to Problems in Elastodynamics". Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19, pp. 73-91.

Mansur, W. J. y Brebbia, C. A., (1982), "Formulation of the Boundary Element Method for Transient Problems Governed by the Scalar Wave Equation". Appl. Math. Modelling, Vol. 6, pp. 307-311.

Mansur, W. J., (1983), "A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method". Ph. D. Thesis, Universidad de Southampton.

Mansur, W. J. y Brebbia, C. A., (1985), "Transient Elastodynamics". In Topics in Boundary Element Research, Vol. 2, C. A. Brebbia (Ed.), pp. 124-155, Springer-Verlag, Berlin.

- Medina López, Cristina (2015), "Advances in the study of soil-structure interaction effects on the dynamic response of piled structures". Doctoral dissertation. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Miura, K., Kaynia, A. M., Masuda, K., Kitamura, E. y Seto, Y., (1994), "Dynamic Behaviour of Pile Foundations in Homogeneous and Non-homogeneous Media". *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 23, pp. 183-192.
- Mohammadi, M. y Karabalis, D. L., (1990), "3-D Soil-Structure Interaction Analysis by BEM: Comparison Studies and Computational Aspects". *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, Vol. 9, pp. 96-108.
- Muki, R. y Sternberg, E., (1969), "On the Diffusion of an Axial Load from an Infinite Cylindrical Bar Embedded in an Elastic Medium". *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 5, pp. 587-606.
- Niwa, Y., Kobayashi, S. y Azuma, N., (1975), "A Analysis of Transient Stresses Produced Around Cavities of Arbitrary Shape During Passage of Travelling Waves". *Mem. Fac. Eng.*, Universidad de Kyoto, Vol. 37, pp. 28-46.
- Niwa, Y., Kobayashi, S. y Fukui, T., (1976), "Applications of Integral Equation Method to Some Geomechanical Problems". In *Numerical Methods in Geomechanics*, C. S. Desai (Ed.), pp. 120-131, ASCE, New York.
- Niwa, Y., Fukui, T., Kato, S. y Fujiki, K., (1980), "An Application of the Integral Equation Method to Two- Dimensional Elastodynamics". *Theor. Appl. Mech.*, Vol. 28, pp. 281-290.
- Ottenstreuer, M. y Schmid, G., (1981), "Boundary Elements Applied to Soil-Foundation Interaction".
- Padrón, L., (2009), "Numerical model for the dynamic analysis of pile foundations", Doctoral Dissertation. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Proc. 3rd Int. Sem. on Recent Advances in Boundary Element Methods, Irvine, Calif., Springer-Verlag, pp. 293-309.
- París, F., (1996), "Teoría de la Elasticidad". Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Sevilla.
- Paul, H. S., (1967), "Vibration of a Rigid Circular Disk on an Infinite Elastic Plate". *J. Acoust. Soc.*

---

Am., Vol. 42, pp. 412-416.

Reissner, E., (1936), "Stationäre, Axialsymmetrische, Durch Eine Schüttelnde Masse Erregte Schwingung Eines Homogenen Elastischen Halbraumes". Ingenieur Archiv., Vol. 7, pp. 381-396.

Rice, J. y Cleary, M. P., (1976), "Some Basic Stress-Diffusion Solutions for Fluid Saturated Porous Media with Compressible Constituents". Rev. Geophys. Space Phys., Vol. 14, pp. 227-241.

Richart, F. E., Woods, R. D. y Hall, J. R., (1970), "Vibrations of Soils and Foundations". Prentice-Hall.

Sanchez-Sesma, F. J. y Rosenblueth, E., (1979), "Ground Motion at Canyon of Arbitrary Shape Under Incident SH Waves". Earthquake Eng. and Struct. Dyn., Vol. 7, pp. 441-450.

Santana, A. (2015). "Análisis de los efectos de interacción suelo-estructura en la respuesta sísmica de estructuras enterradas". Tesis doctoral. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Skempton, A. W., (1954), "The Pore Pressure Coefficients A and B". Geotechnique, Vol. 4, pp. 143-147.

Somigliana, C., (1889), "Sulle Equazioni della Elasticità". Annali di Matematica, Serie 2, 17, 37.

Spyrakos, C. C., (1984), "Dynamic Response of Strip-Foundations by the Time Domain BEM-FEM Methods". Ph. D. Thesis, Universidad de Minnesota, Minneapolis.

Spyrakos, C. C. y Patel, P., (1987), "Significance of Foundation-Soil Separation in Dynamic Soil-Structure Interaction". Proc. 58th Shock and Vibration Symp, Huntsville, Alabama.

Stokes, G. G., (1849), "On the Dynamical Theory of Diffraction". Trans. Camb. Phil. Soc., Vol.9, pp.1.

Stoll, R. D., (1977), "Acoustic Waves in Saturated Sediments". In Physics of sound in marine sediments, (Ed.) L. Hampton, Plenum Press, New York, pp. 19-39.

Symm, G. T., (1963), "Integral Equation Methods in Potential Theory-II". Proc. Roy. Soc. Ser. A, Vol. 275, pp. 33-46.

Tassoulas, J. L., y Kausel, E., (1983), "Elements for Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Strata". Int. J. Numer. Methods in Eng., Vol. 19, pp. 1005-1032.

Tassoulas, J. L., (1988), "Dynamic Soil-Structure Interaction". In Boundary Element Methods in Structural Analysis, D. E. Beskos (Ed.), pp. 273-308, ASCE, New York.

Terzaghy, (1925), "Principle of Soil Mechanics". Eng. News Record.

Veletsos, A. S. y Wei, Y. T., (1971), "Lateral and Rocking Vibration of Footings". J. Soil Mech. Found. Eng. Div., ASCE, Vol. 97, pp. 1227- 1248.

Veletsos, A. S. y Verbic, B., (1973), "Vibration of Viscoelastic Foundation". J. Geo. Eng. Div., ASCE, Vol. 100, pp. 225-246.

Verruijt, A., (1969), "Elastic Storage of Aquifers". In Flow through porous media, (Ed.) R. J. M. DeWiest, Academic Press, New York.

Wheeler, L. T. y Sternberg, E., (1968), "Some Theorems in Classical Elastodynamics". Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 31, pp. 51-90.

Whitman, R. V. y Richart, F. E., (1967), "Design Procedures for Dynamically Loaded Foundations".

J. Soil Mech. Found. Eng. Div., ASCE, Vol. 93, SM6, pp. 169-193.

Wong, H. L. y Luco, J. E., (1978), "Dynamic Response of Rectangular Foundations to Obliquely Incident Seismic Waves". Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 6, pp. 3-16.

Zeng, X. y Rajapakse, R: K. N. D., (1999), "Dynamic Axial Load Transfer from Elastic Bar to Poroelastic Medium". J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 125, No. 9, pp. 1048-1055.